

### Graphes : exercices

**Exercice 1** Dessiner tous les graphes non-orientés (connexes ou non) à 4 sommets. Combien y-a t'il de graphes orientés possédant 4 sommets et 3 arcs ?

**Exercice 2** Soit  $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Le graphe de Petersen est un graphe non-orienté défini comme suit :

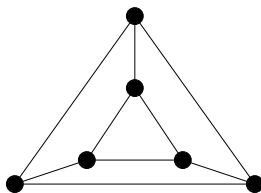
les sommets sont les paires d'éléments de  $X$ , deux sommets sont joints par une arête si et seulement si ce sont deux paires disjointes d'éléments de  $X$ .

1. Déterminer le nombre de sommets, le degré des sommets, le nombre d'arêtes et le diamètre de ce graphe.
2. Dessiner ce graphe en indiquant pour chaque sommets les deux éléments de  $X$  qu'il contient en tant que paire.
3. Le graphe de Petersen est-il Hamiltonien ? est-il planaire ? Quel est son nombre chromatique ?

**Exercice 3** Trouver deux graphes non isomorphes dont les degrés des sommets forment la même suite.

**Exercice 4** Le graphe représentatif des arêtes  $L(G)$  d'un graphe  $G$  a pour sommets les arêtes de  $G$ , deux sommets de  $L(G)$  sont adjacents si les arêtes correspondantes de  $G$  sont incidentes à un même sommet.

1. Dessiner les graphes représentatifs d'un cycle à 5 sommets, d'une étoile à 5 branches et d'un graphe complet à 4 sommets. En déduire la forme des graphes  $L(C_n)$ ,  $L(S_n)$ ,  $L(K_n)$  et les indices chromatiques de  $C_n$ ,  $S_n$  et  $K_n$ .
2. Déterminer le graphe  $G$  dont le graphe représentatif des arêtes est le prisme du triangle, dessiné ci-dessous :



**Exercice 5** (Examen Juin 2002)

1. Écrire un algorithme qui teste si trois sommets  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'un graphe d'ordre  $n$  (représenté par sa matrice d'adjacence  $A$ ) forment un triangle (cycle de longueur 3).

2. Écrire un algorithme qui compte le nombre de triangles différents d'un graphe.

**Exercice 6** Tout graphe contenant un triangle ( $K_3$ ) ne peut pas être coloré en moins de trois couleurs.

1. Construire un graphe sans  $K_3$  qui nécessite également trois couleurs.
2. Comment, à partir du graphe précédent, construire un graphe sans  $K_4$  nécessitant 4 couleurs ?

**Exercice 7** Une matrice  $n \times n$  dont les entrées sont dans  $\{1, 2, \dots, n\}$  est appelée carré latin si tout élément de  $\{1, 2, \dots, n\}$  apparaît exactement une fois sur chaque ligne et chaque colonne.

1. trouver un carré latin pour  $n = 3$ ,
2. traduire ce problème en terme de coloration de graphe.

**Exercice 8** L'UFR Sciences et techniques doit organiser les horaires des examens de la session de juin. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et enfin 6 et 7.

Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

Transcrire ce problème en terme de problème de graphe et le résoudre.

**Exercice 9** Graphes Aléatoires.

1. Ecrire un algorithme qui crée un graphe aléatoire  $G_{n,p}$ , où  $n$  est le nombre de sommets et  $p$  la probabilité d'arête.
2. Quel est le nombre d'arêtes attendu d'un tel graphe ?

**Exercice 10** (Examen Juin 2006)

Un graphe **unicyclique** est un graphe qui possède **un seul** cycle.

1. Dessiner tous les graphes unicycliques avec 5 sommets.
2. Pour chacun d'entre eux, donner son diamètre, son nombre chromatique et dire s'il est Hamiltonien et/ou Eulérien. Justifier brièvement sur le dessin ou par une courte phrase.
3. Plus généralement, donner, en justifiant, un encadrement pour le nombre chromatique d'un graphe unicyclique d'ordre  $n$ .