

## Document de travail pour le TD3

### Question 1- enveloppe convexe et gift wrapping

Le principe de l'algorithme a été donné en cours. Tentez de préciser l'algorithme pour pouvoir le programmer. Ci dessous, vous trouverez une formalisation possible. Il y a bien sûr de nombreuses solutions possibles.

#### Rappels divers

- un segment détermine un vecteur ;
- les points  $P_1=(x_1,y_1)$ ,  $P_2=(x_2,y_2)$ ,  $P_3=(x_3,y_3)$  déterminent deux segments  $P_1P_2$  et  $P_1P_3$ ,
- on note  $V_{12}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$  et  $V_{13}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$  les vecteurs correspondants,
- la nature de l'angle entre deux segments<sup>1</sup> (plat, tournant à gauche, tournant à droite) peut être déterminée à partir du produit vectoriel de ces deux vecteurs et plus particulièrement du déterminant de leur produit vectoriel,
  - le déterminant du produit vectoriel de  $V_{12}$  et  $V_{13}$  est  $(x_2-x_1)*(y_3-y_1)-(y_2-y_1)*(x_3-x_1)$ ,
  - si ce déterminant est nul, les points sont alignés,
  - si ce déterminant est positif strictement, les points forment un tournant à gauche,
  - si ce déterminant est négatif strictement, les points forment un tournant à droite ;
- le signe du produit scalaire de deux vecteurs alignés permet de savoir si les deux vecteurs sont orientés dans le même sens ou pas :
  - le produit scalaire de  $V_{12}$  et  $V_{13}$  est  $(x_2-x_1)*(x_3-x_1)+(y_3-y_1)*(y_2-y_1)$ ,
  - le produit scalaire de deux vecteurs de même sens est positif, celui de deux vecteurs de sens opposés est négatif.

#### Piste de travail

Pour calculer l'enveloppe convexe d'un ensemble E de n points 2D, cette méthode procède ainsi :

- Calculer le point  $p_0$ , d'abscisse minimale (et d'ordonnée minimale s'il y a plusieurs points ayant la même ordonnée minimale). C'est le premier point de l'enveloppe convexe.
- Le point q, suivant un point p donné de l'enveloppe convexe, est calculé ainsi :

suivant( p, E) :

Le résultat (un point noté q) est l'élément minimum, avec cette comparaison entre deux points a et b :

si p a b tourne à gauche (le déterminant |p a b| est positif) alors a est meilleur que b.

si p a b tourne à droite (le déterminant |p a b| est négatif) alors b est meilleur que a.

si p a b sont alignés (le déterminant |p a b| est nul),

alors

si les points p a b sont alignés dans cet ordre p a b (le produit scalaire  $p_a \cdot a_b$  est positif) ,

alors b est meilleur

sinon a est meilleur

La méthode calcule le premier point  $p_0$ , le suivant de  $p_0$ , le suivant du suivant de  $p_0$ , etc jusqu'à retomber sur  $p_0$ .

Cette méthode est en  $O(nk)$  où k est le nombre de sommets de l'enveloppe convexe. En effet le calcul du suivant est en  $O(n)$ . Elle est donc en  $O(n^2)$  dans le pire des cas.

Si les calculs sont exacts, la méthode fonctionne, même en présence de cas particuliers (points alignés,

<sup>1</sup> L'orientation relative de deux vecteurs dans un plan est souvent déterminée en fonction du produit vectoriel de ces vecteurs.

points confondus). C'est le cas ici, car les points ont de petites coordonnées entières.

### Vers les algorithmes

Nous allons travailler avec des tableaux à  $n$  colonnes et 2 lignes pour stoker les ensembles et listes de points : première ligne pour la coordonnée en  $x$ , seconde ligne pour la coordonnée en  $y$ . Chaque point est identifié par son indice dans le tableau.

Ecrivez les algorithmes de méthodes ayant en paramètres les indices de trois points et calculant respectivement le produit scalaire et le déterminant du produit vectoriel de ces points (l'ordre des points est celui de la liste de paramètres).

Le schéma général de calcul de l'enveloppe convexe (gift wrapping) est :

- calculer le point  $p_0$ , d'abscisse minimale (et d'ordonnée minimale s'il y a plusieurs points ayant la même ordonnée minimale). Ajouter  $p_0$  à l'enveloppe convexe (comme premier point).
- Rechercher les autres points de l'enveloppe convexe :

```

p ← p0
s ← p0
répéter
    pour i de 0 à n
        faire si i est un meilleur successeur de p que s
            alors s ← i
        fsi
    fpour
    ajouter s à l'enveloppe convexe (comme successeur de p)
    p ← s
jusqu'à s = p0
  
```

Pour décider lequel de deux points ( $a$  et  $b$  donnés) est le meilleur successeur d'un point  $p$  donné, vous devez considérer les deux vecteurs déterminés respectivement par les points  $p a$  et les points  $p b$  :

```

selon cas
    le déterminant de p,a,b est strictement positif : s ← a
    le déterminant de p,a,b est strictement négatif : s ← b
    le déterminant de p,a,b est nul :
        si le produit scalaire de p,a,b est négatif
            alors s ← b
            sinon s ← a
        fsi
fincas
  
```

Ecrivez l'algorithme d'une méthode ayant en paramètres les indices de trois points (un point donné et ses deux successeurs potentiels, l'ordre des points est celui de la liste de paramètres) et calculant l'indice du meilleur successeur.

Utilisez cet algorithme pour calculer l'enveloppe convexe d'un ensemble de points.

Remarques : les doublons (points identiques) doivent être éliminés. Nous travaillerons sur des ensembles de points ne contenant pas de doublons. Vous devrez préparer pour les TP des méthodes permettant :

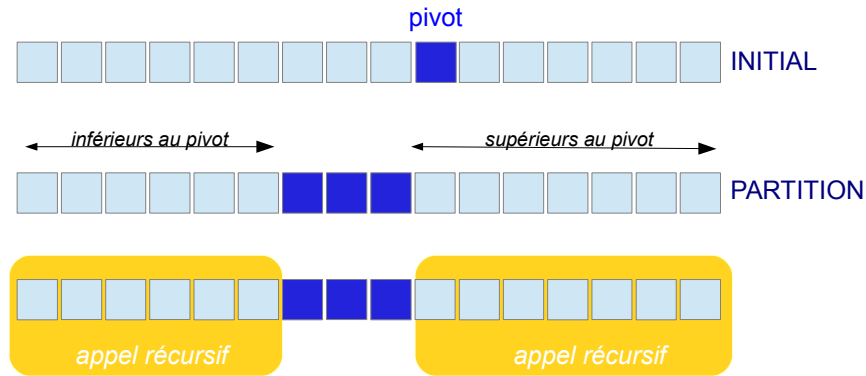
- l'affichage textuel d'un ensemble de points : un point par ligne, dans l'ordre coordonnées  $x$  puis  $y$  ;
- la génération aléatoire d'un ensemble de max points ;
- la recherche d'un point (ayant des coordonnées  $x$  et  $y$  données) dans un ensemble de points : le résultat est un booléen ;
- la génération aléatoire d'un ensemble de points tous distincts.

### Question 2- tri rapide

Ecrivez l'algorithme récursif d'un tri rapide.

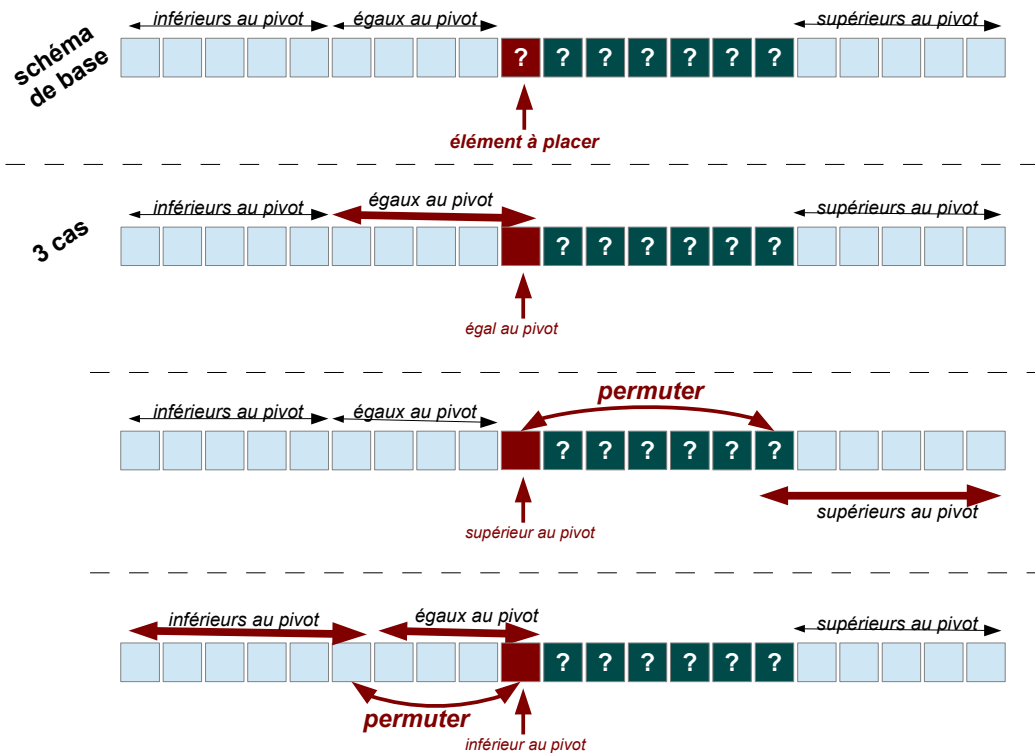
A chaque étape du tri :

- choisir un pivot (qui doit être un élément du tableau),
- partitionner le tableau (éléments inférieurs, égaux, supérieurs au pivot),
- appels récursifs sur les parties du tableau contenant les éléments inférieurs et supérieurs au pivot.



Pourquoi le pivot doit-il être un élément du tableau ?

Vous pouvez utiliser l'algorithme du drapeau (E. W. Dijkstra) pour effectuer la partition du tableau en fonction du pivot.



### Pour la suite

Vous pouvez dès maintenant réfléchir aux questions 1, 2, 3 ainsi que 7, 8, 9, 10, 11 du sujet d'examen/partiel qui est donné sur [ufrsciencestech](#) (fichier *examen2012-13.pdf*).