Calcul de la racine carrée, de l'inverse par l'itération de Newton. Calcul de $\cos x$, $\sin x$

11 septembre 2012

1 Contractance

Nous aurons besoin de cette notion tout à l'heure.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur un intervalle X. On dit que f est contractante sur X si pour tout $x_1 \in X, x_2 \in X$, on a : $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$.

Notons $f'(X)$ un intervalle contenant tous les $\frac{f(x_1)-f(x_1)}{x_1-x_2}$ pour $x_1 \in X, x_2 \neq x_1 \in X$ (en fait si $x_1 = x_2$, on peut considérer $f'(x_1)$).

Alors $f(x_1) - f(x_2) \in (x_1 - x_2)f'(X)$. Donc il suffit que $|f'(X)| < 1$ pour que f soit contractante dans X.

2 Racine carrée

Les processeurs en arithmétique flottante utilisent souvent (une variante de) la méthode de Newton.

Pour résoudre $f(x) = x^2 - a = 0$ (donc $f'(x) = 2x$), la méthode de Newton calcule jusqu'à convergence : $x_0 = a$, $x_{k+1} = N(x_k)$, où :

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$$

Cette méthode pour calculer la racine carrée était utilisée par les Babyloniens dans l'antiquité...

Vérifiez que $N(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.

Vérifiez que $N(\sqrt{a} + \epsilon) = \sqrt{a} + O(\epsilon^2)$, où ϵ "tend vers zéro". Donc si x_k est à moins de 10^{-10} de $\sqrt{a}$, x_{k+1} sera à moins de 10^{-20} de $\sqrt{a}$. On dit que la convergence est quadratique ; en pratique, le nombre de décimales correctes double à chaque itération.

Cette méthode nécéssite une division par étape : a/x. Elle peut être évitée si est considérée :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a} = 0$$

Alors $f'(x) = -2/x^3$, et

$$N(x) = \frac{x}{2}(3 - bx^2), \text{où } b = 1/a$$

Vérifiez que $N(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$. Vérifiez que $N(\sqrt{a}+\epsilon) = \sqrt{a}+O(\epsilon^2)$. Cette variante n'utilise qu'une seule division : $b = 1/a$, lors d'une initialisation.

Convergence : la méthode converge quand x_0 appartient à un intervalle X où N est contractante ; une condition suffisante est $|N'(X)| < 1$. Or

$$N'(x) = 3/2(1 - bx^2)$$

et, après avoir tracé la courbe $(x, N'(x))$, une parabole, vous pouvez calculer l'intervalle où la convergence est garantie.

Dessinez aussi la courbe $x, N(x)$ pour $a = 2, b = 1/2$. Dessinez la droite $y = x$. Suivez l'algorithme sur le dessin. Vérifiez que N est contractante dans un intervalle X quand $|N'(X)| < 1$. Résoudre $|N'(x) = 3/2(1 - bx^2)| < 1$

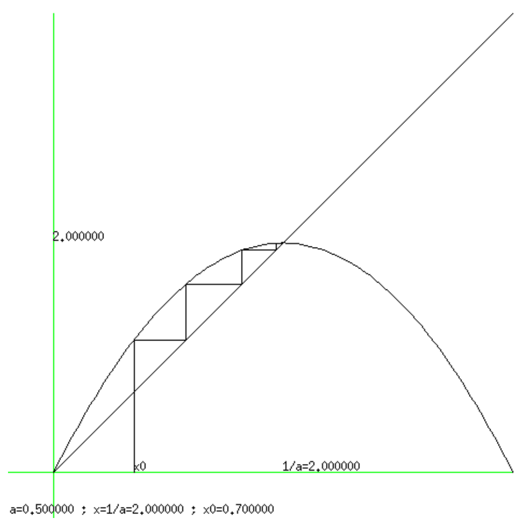

FIG. 1 – Calcul de l'inverse de $a = 1/2$. La méthode part de $x_0 = a = 1/2$, et converge vers le point d'intersection de la parabole (la courbe $(x, N(x))$) et de la droite diagonale $y = x$.

3 Inverse

Pour calculer $1/a$, certains processeurs arithmétiques flottants utilisent la méthode de Newton pour résoudre

$$f(x) = \frac{1}{x} - a = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

L'itération de Newton est :

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{1}{x} - a}{\frac{-1}{x^2}} = x(2 - ax)$$

Vérifiez que $N(1/a) = 1/a$ et que $N(1/a + \epsilon) = 1/a + O(\epsilon^2)$.

4 Calcul de $\cos x, \sin x$

Une série $\sum_i u_i$ est alternée quand (au moins à partir d'un certain rang), les signes de $(-1)^i u_i$ sont tous égaux.

Théorème : si $\sum_i u_i$ est une série alternée, et si $|u_i|$ est décroissante tendant vers 0, alors $\sum_i u_i$ converge vers une valeur s, incluse dans $[s_n, s_{n+1}]$ ou $[s_{n+1}, s_n]$.

La preuve est omise. Voir "http ://c.caignaert.free.fr/chapitre9/node5.html"

Ces séries pour $\cos x$ et $\sin x$ sont alternées :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \ldots$$

Attention : pour assurer une bonne convergence, il faut réduire l'argument x, pour que $|x|$ soit inférieure à 1 ; la p'eriodicité et les symmétries de cos et sin sont utilisées.

Programmez le calcul de cos et/ou $\sin x$; comparez avec les fonctions de la librairie mathématique de votre langage de programmation.