Comportement de Newton

5 juin 2011

La méthode de Newton $x_{n+1} = N(x_n)$ pour résoudre $F(x) = 0$ peut avoir plusieurs comportements :

- elle peut converger vers un point fixe de N, ce qui donne une racine de F.

- elle peut errer dans un sous espace sans racine, par exemple pour résoudre $x^2 + 1 = 0$, si on part d'un x_0 réel ; même en effectuant l'itération dans les complexes, les x_n resteront réels, et $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.

- même cas que le précédent, pour les systèmes contradictoire : $0 = 1$, ou $x - y = x - y - 1 = 0$. Même dans $\mathbb{C}$, un système contradictoire n'a pas de solution.

- elle peut être attirée par un cycle attractif (de période > 1). Exemple dans $\mathbb{C}$: $F(z) = z^3 - 2z + 2$. Alors $N(z) = (2z^3 - 2)/(3z^2 - 2)$. 0 et 1 forment un cycle pour N : $N(0) = 1$, $N(1) = 0$. De plus ce cycle est attractif. Un cycle $C = (x_1, x_2, \ldots x_p)$ de période p, pour N, est attractif si $|\prod_{x_k \in C} N'(x_k)| < 1$, et super-attractif si $\prod_{x_k \in C} N'(x_k) = 0$. Ici $N'(0) = N'(1) = 0$. Hubbard et Homer Smith, et indépendamment Curry, Garnett et Sullivan ont étudié les polynômes paramétrés par $\lambda \in \mathbb{C}$: $F(z) = (z - 1)(z - \lambda + 1/2)(z + \lambda + 1/2)$. La figure 1 montre dans le plan des λ le comportement de la méthode de Newton ; pour les points jaunes, la méthode de Newton (avec $x_0 = 0$) ne converge pas vers une des trois racines. La figure 2 montre un agrandissement ; l'ensemble des points λ pour lesquels la méthode de Newton (avec $x_0 = 0$) ne converge pas vers une des trois racines ressemble à une copie de l'ensemble de Mandelbrot.

On peut dessiner les mêmes images dans le plan des λ en remplaçant la méthode de Newton par la méthode de Newton amortie. Dans la méthode de Newton amortie, l'itération

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \times f'(x_n)^{-1}$$

est remplacée par

$$x_{n+1} = x_n - a \times f(x_n) \times f'(x_n)^{-1}$$

où $0 < a \leq 1$ est le facteur d'amortissement. On constate que plus a est petit, et plus l'aire des "zones de Mandelbrot" diminuent.

En fait, la plus grande région des λ pour lesquels la méthode de ewton amortie échoue est près de $\lambda = 0.517333i$ (ou son symmétrique $\lambda = -0.517333i$). La figure 5 montre des agrandissements sur cette région.

Bibliographie :

J-L Chabert, E Barbin, M. Guillemot, A. Michel-Pajus, J. Borowczyk, A. Djebbar, J-C. Martzloff. Histoire d'algorithmes. Collection Regards sur la science. Belin. 1994. Pages 216–.

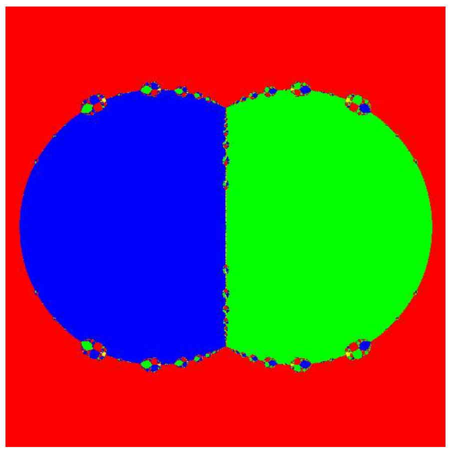

Fig. 1 – Chaque point de l'image a pour coordonnée $\lambda = (0 \pm 1.6) + (0 \pm 1.6)i \in \mathbb{C}$. Le point est rouge, bleu ou vert selon la racine vers laquelle converge la méthode de Newton, pour résoudre : $F(x) = (x-1)(x-\lambda+1/2)(x+\lambda+1/2)$ en partant de $x_0 = 0 + 0i$. Les points en jaune (il y en a peu, et ils se trouvent à la frontière des bassins d'attraction en rouge, vert, bleu) représentent les λ pour lesquels la méthode de Newton ne converge pas vers une des racines.

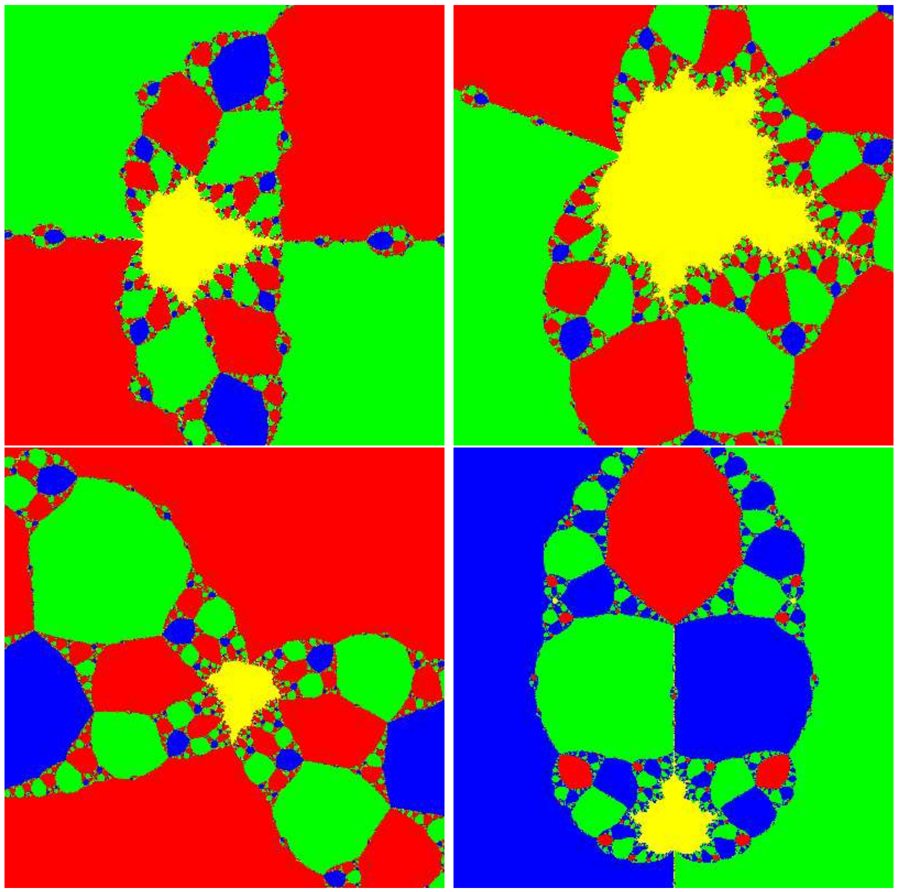

FIG. 2 – Zooms. Les ensembles en jaune contiennent les points pour lesquels la méthode de Newton Raphson échoue. Pour les points λ en rouge, vert, bleu, la méthode converge vers une des trois racines. Première image : $\lambda = (0.4875 \pm 0.035) + (0.9975 \pm 0.035)i$. Deuxième image : $\lambda = (0.885 \pm 0.035) - (0.915 \pm 0.035)i$. Troisième image : $\lambda = (1.005 \pm 0.01) - (0.93 \pm 0.01)i$. Quatrième image : $\lambda = (0 \pm 0.035) + (0.3075 \pm 0.035)i$. Ces ensembles ressemblent à celui de Mandelbrot.

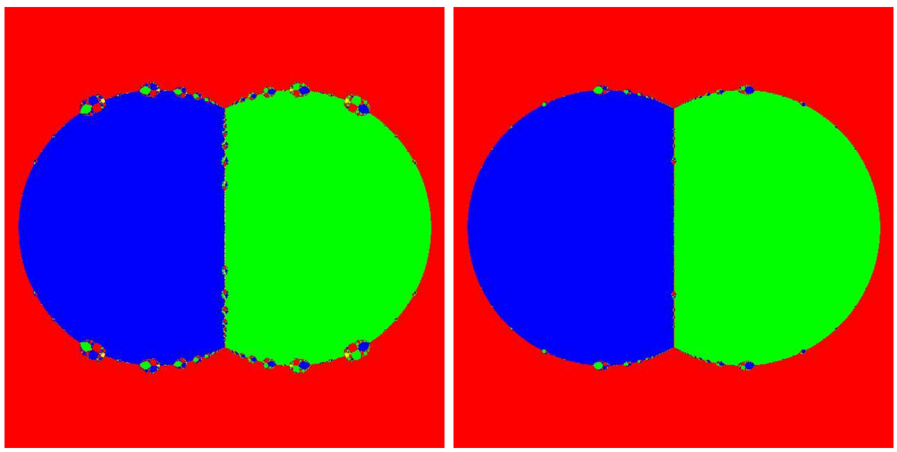

FIG. 3 – Chaque point de l'image a pour coordonnée $\lambda = (0 \pm 1.6) + (0 \pm 1.6)i \in \mathbb{C}$. Le point est rouge, bleu ou vert selon la racine vers laquelle converge la méthode de résolution (à gauche : Newton ; à droite : Newton amortie, avec $a = 1/2$), pour résoudre : $F(x) = (x-1)(x-\lambda+1/2)(x+\lambda+1/2)$ en partant de $x_0 = 0+0i$. On constate que la méthode de Newton amortie échoue moins souvent que la méthode de Newton.

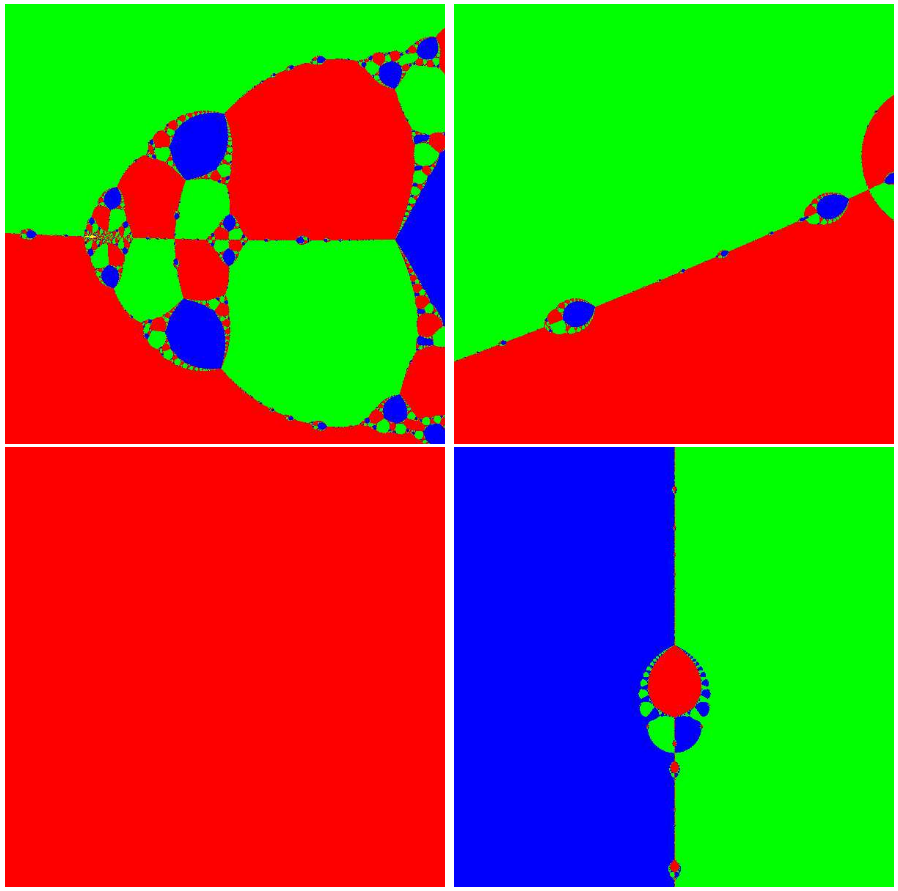

FIG. 4 – Zooms, avec Newton amorti, amortissement $a = 0.5$. Les ensembles en jaune contiennent les points pour lesquels la méthode de Newton Raphson amortie échoue. Première image : $\lambda = (0.4875 \pm 0.035) + (0.9975 \pm 0.035)i$. Deuxième image : $\lambda = (0.885 \pm 0.035) - (0.915 \pm 0.035)i$. Troisième image : $\lambda = (1.005 \pm 0.01) - (0.93 \pm 0.01)i$. Quatrième image : $\lambda = (0 \pm 0.035) + (0.3075 \pm 0.035)i$.

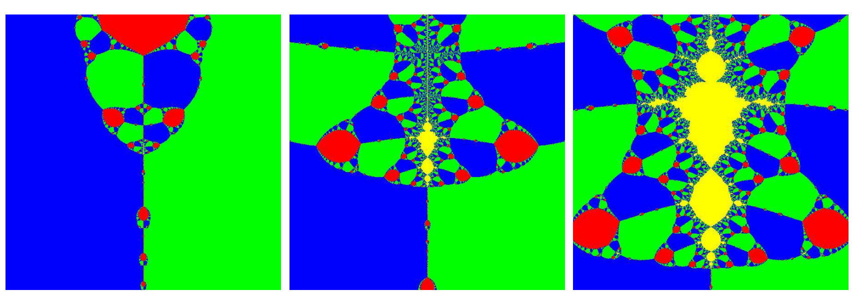

FIG. 5 – Zooms sur la région de centre $\lambda = 0.517333i$. C'est la plus grande région pour laquelle Newton amoti échoue. De gauche à droite, le demi-coté vaut 0.035, 0.002, 0.0006.