Sujet TD : Fibonacci, matrice, diagonalisation

Dominique Michelucci, Université de Dijon

La suite de Fibonacci est définie par :

$$F_0 = 0, F_1 = 1, n > 1 \Rightarrow F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
(F_n, F_{n-1}) &= (F_{n-1}, F_{n-2})M \text{ avec : } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (F(n-2), F(n-3))M^2 \\
&= \dots \\
&= (F_1, F_0)M^{n-1} = (1, 0)M^{n-1}
\end{aligned}$$

La méthode d'exponentiation rapide est utilisée pour calculer M^{n-1} en $O(\log_2 n)$ produits de matrices carrées 2×2.

On peut remarquer que M est diagonalisable :

Ses valeurs propres sont racines de

$$|M - \lambda I_{2,2}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \phi)(\lambda - \phi') = 0$$

où :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618..., \quad \phi' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -0.618...$$

Ses vecteurs propres sont tels que $(a, b)M = (a + b, a) = \lambda \times (a, b)$. Donc $(\phi, 1)$, et $(\phi', 1)$ sont deux vecteurs propres de M, associés à ϕ et ϕ' :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \phi & 1 \\ \phi' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi+1 & \phi \\ \phi'+1 & \phi' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi^2 & \phi \\ \phi'^2 & \phi' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ \phi' & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

L'inverse de $R = \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ \phi' & 1 \end{pmatrix}$ est $R^{-1} = \frac{1}{\phi-\phi'} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\phi' & \phi \end{pmatrix}$. Or $\phi - \phi' = \sqrt{5}$.

De $RM = \mathrm{diag}(\phi, \phi')R$, on déduit : $M = R^{-1}\mathrm{diag}(\phi, \phi')R$. Notons $D = \mathrm{diag}(\phi, \phi')$.

Donc $M^k = (R^{-1}DR)^k = \ldots = R^{-1}D^kR$. Deux conséquences :

1. Ceci justifie que $F_k = a\phi^k + b\phi'^k$, pour certaines constantes a et b, que l'on peut calculer en considérant $F_0 = a\phi^0 + b\phi'^0$ et $F_1 = a\phi^1 + b\phi'^1$. Vérifier : $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$, et $b = -a$.

2. Il existe donc une méthode plus rapide (du moins pour des matrices plus grandes que M !) pour calculer M^k : quand M est diagonalisable, soit D la matrice diagonale des valeurs propres, soit R la (en fait, une) matrice des vecteurs propres ; comme $M = R^{-1}DR$, pour calculer $M^k = R^{-1}D^kR$. Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$, alors $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots \lambda_n^k)$, en $O(n)$ au lieu de $O(n^3)$. Le calcul de D et R (par la méthode QR) et de R^{-1} est en $O(n^3)$. On passe donc de $O(n^3 \log k)$ à $O(n^3)$ (k est l'exposant et $n \times n$ la taille de la matrice).

Ceci se généralise à des suites plus compliquées, par exemple le nombre de noeuds de l'arbre de Fibonacci (cet arbre est l'arbre des appels récursifs dans le calcul récursif naïf de F_k) : T_0 a comme racine 0 et n'a pas de fils, T_1 a comme racine 1 et n'a pas de fils, et pour $k > 1$, T_k a comme racine k et a deux fils : T_{k-2} et T_{k-1}. Le nombre de noeuds de T_k et t_k et vérifie : $t_0 = 1$, $t_1 = 1$, et pour $k > 1$, $t_k = t_{k-2} + t_{k-1} + 1$. Trouvez l'équivalent de la matrice M (elle est 3 par 3), ses valeurs propres (ce sont 1, ϕ et ϕ'). En déduire qu'il existe trois constantes a, b, c telles que $t_k = a\phi^k + b\phi'^k + c1^k$; calculez les en considérant $k = 0, 1, 2$. Ensuite prouvez que la formule est exacte par récurrence.