Algorithme de Newton amorti

29 avril 2011

Dans la méthode de Newton amortie, l'itération

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \times f'(x_n)^{-1}$$

est remplacée par

$$x_{n+1} = x_n - a \times f(x_n) \times f'(x_n)^{-1}$$

avec $0 < a \leq 1$. a est le facteur d'amortissement.

Programmer la méthode de Newton amortie pour trouver les racines cubiques de 1. Pour cela vous traduirez l'équation $z^3 - 1 = 0$ en un système de 2 équations et 2 inconnues, en posant $z = x + iy$, où $i^2 = -1$. Pour les 400×400 pixels d'un carré $[-c, +c]^2$, vous calculerez vers quelle racine converge la méthode de Newton, et vous afficherez chaque pixel avec une couleur dépendant de cette racine. Vous testerez $a = 1$, $a = 0.75$, $a = 0.5$, $a = 0.25$, $a = 0.1$. Vous devez obtenir des images comme suit. Que constatez vous ?

Conclusion : comme le caractère fractal des frontières est affaibli, le Newton amorti peut être utilisé à la place de l'homotopie. Figs 1,2,3 montrent les bassins d'attraction pour Newton standard ($a = 1$), Newton amorti avec $a = 0.75$, avec $a = 0.5$, et avec $a = 0.25$.

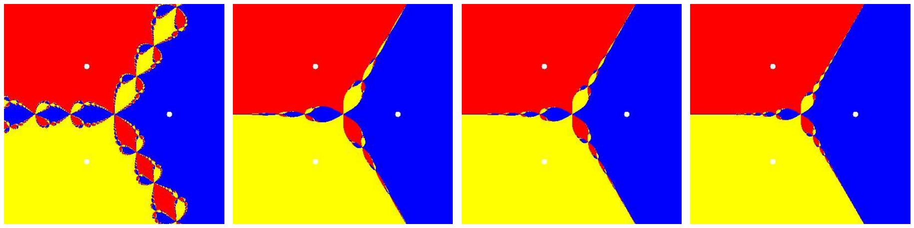

FIG. 1 – Bassins d'attraction de $z^3 - 1 = 0$. $c = 2$, $a = 1, 0.75, 0.5, 0.25$.

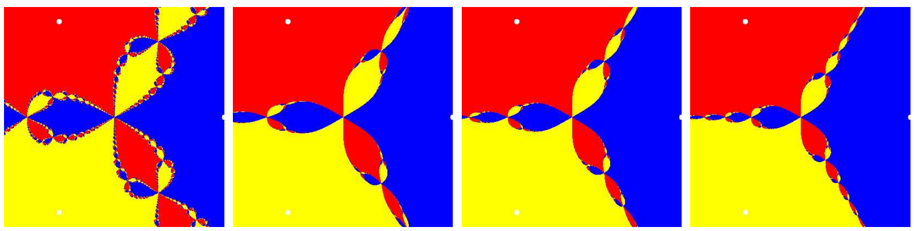

FIG. 2 – Bassins d'attraction de $z^3 - 1 = 0$. $c = 1$, $a = 1, 0.75, 0.5, 0.25$.

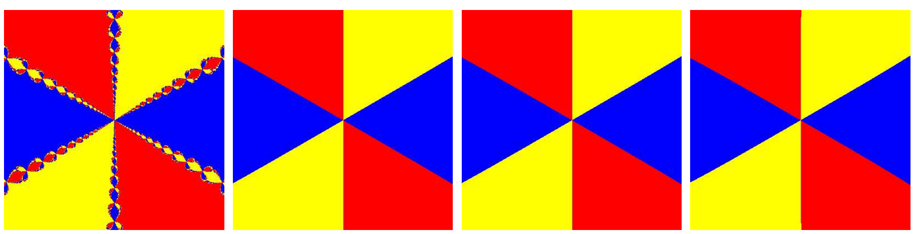

FIG. 3 – Bassins d'attraction de $z^3 - 1 = 0$. $c = 0.1$, $a = 1, 0.75, 0.5, 0.25$.

On peut aussi adapter le facteur d'amortissement en fonction de n, le nombre d'itérations : on peut le prendre petit pour la première itération, puis le multiplier à chaque itération (par $\sqrt{2}$ dans les figures). Figs 4,5,6 montrent les bassins d'attraction pour Newton standard ($a_0 = 1$) puis pour $a_0 = 1/32$, $a_0 = 1/128$, $a_0 = 1/256$. $a_n = a_0(\sqrt{2})^n$.

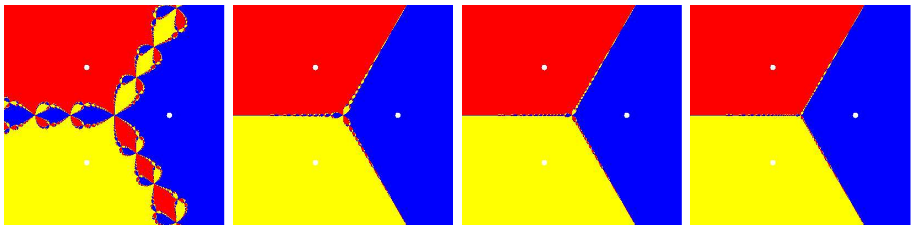

FIG. 4 – Bassins d'attraction de $z^3 - 1 = 0$. $c = 2$. A gauche, le Newton standard. Ensuite Newton amorti variable : $a_0 = 1/32$, $a_0 = 1/128$, $a_0 = 1/512$, et $a_{n+1} = \min(1, \sqrt{2} \times a_n)$.

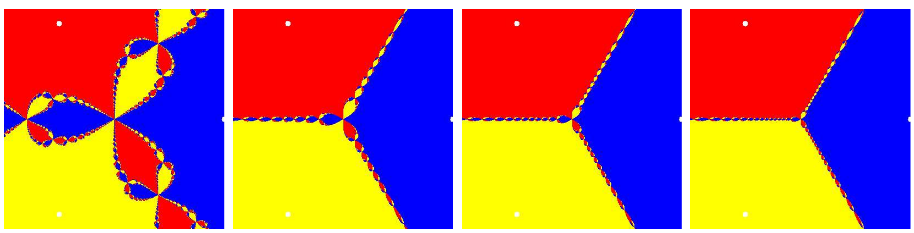

FIG. 5 – Bassins d'attraction de $z^3 - 1 = 0$. $c = 1$. A gauche, le Newton standard. Ensuite Newton amorti variable : $a_0 = 1/32$, $a_0 = 1/128$, $a_0 = 1/512$, et $a_{n+1} = \min(1, \sqrt{2} \times a_n)$.

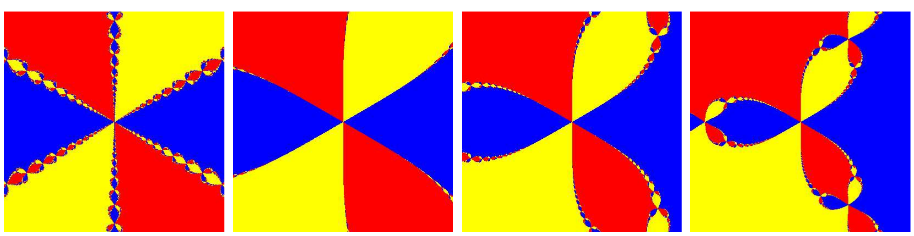

FIG. 6 – Bassins d'attraction de $z^3 - 1 = 0$. $c = 0.1$. A gauche, le Newton standard. Ensuite Newton amorti variable : $a_0 = 1/32$, $a_0 = 1/128$, $a_0 = 1/512$, et $a_{n+1} = \min(1, \sqrt{2} \times a_n)$.