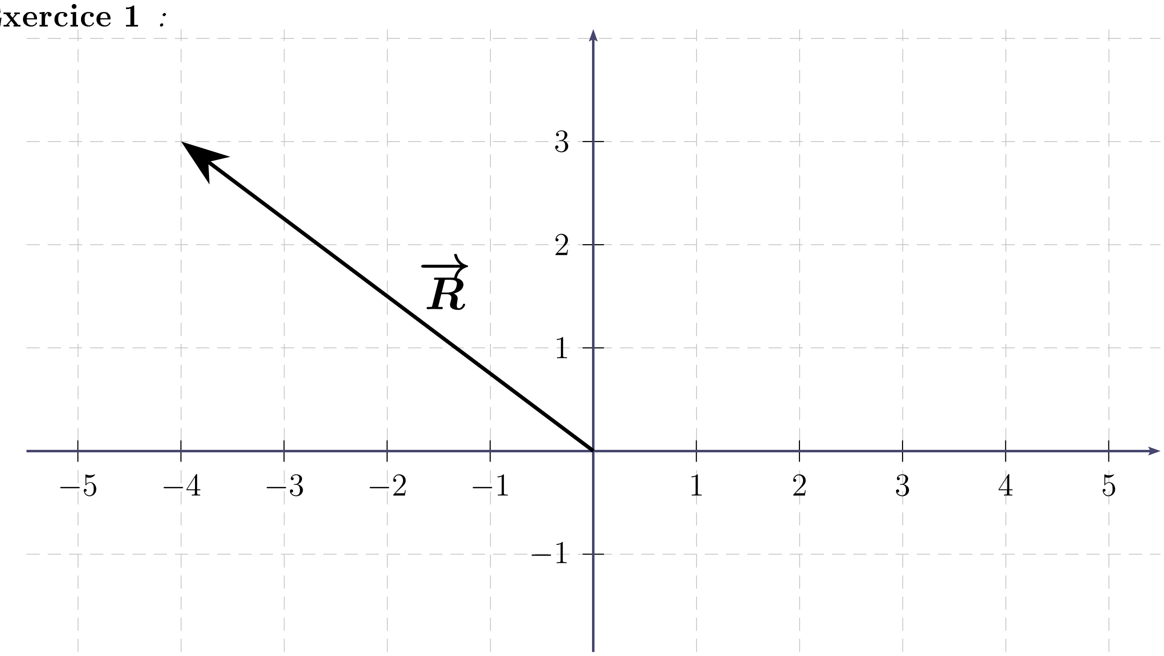
TD1 L2, rappels de géométrie

1 Géométrie plane

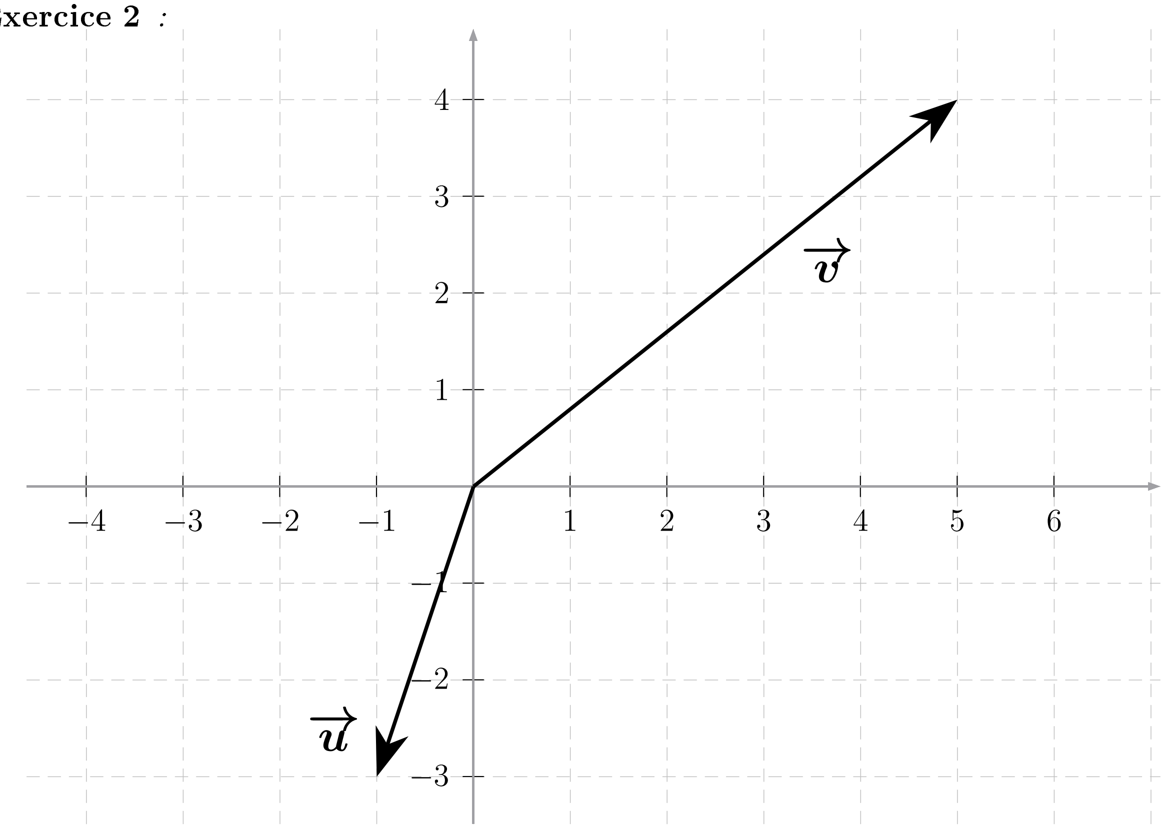
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan affine muni du repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.
Soit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan vectoriel muni de la base orthonormée directe $(\overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.

Exercice 1 *:*



1. *Donner les composantes du vecteur* $\overrightarrow{R}$.
2. *Déterminer le vecteur* $\overrightarrow{R_1}$*, unitaire et de même sens que* $\overrightarrow{R}$.
3. *Calculer l'angle entre les vecteurs* $\overrightarrow{\imath}$ *et* $\overrightarrow{R_1}$.
4. *Donner un algorithme générique pour calculer l'angle entre les vecteurs* $\overrightarrow{\imath}$ *et* $\overrightarrow{R}\,(a; b) \neq \overrightarrow{0}$.

Exercice 2 *:*



1. *Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*
2. *Calculer la somme $\overrightarrow{w}$ des deux vecteurs puis représenter $\overrightarrow{w}$.*
3. *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$ et justifier le signe.*
4. *Calculer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}})$.*
5. *Sans calcul, que vaut $17^2 + 11^2$?*

2 Géométrie dans l'espace

Soit $\mathcal{E}_3$ l'ensemble des points de l'espace à trois dimensions muni du repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$.

Soit $\overrightarrow{\mathcal{E}_3}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace à trois dimensions muni de la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{k}\right)$.

Exercice 3 *:*

Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(2;-3;1)$ et muni de la base $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}(1;-1;1)$ et $\overrightarrow{v}(2;3;0)$.

Exercice 4 *:*

On considère les vecteurs :

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{9}\left(-7\,\overrightarrow{\imath} + 4\,\overrightarrow{\jmath} - 4\,\overrightarrow{k}\right) \qquad \overrightarrow{v} = \frac{1}{9}\left(4\,\overrightarrow{\imath} + 8\,\overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}\right) \qquad \overrightarrow{w} = \frac{1}{9}\left(4\,\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} - 8\,\overrightarrow{k}\right)$$

1. *Montrer que $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{w})$ est une base orthonormale de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.*
2. *Cette base est-elle directe ou non ?*

Exercice 5 *:*

On considère les plans $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *d'équations respectives* $2x-4y+3z+5=0$ *et* $x-2y+3z-2=0$.

1. *Vérifier que* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *ne sont pas parallèles.*
2. *Déterminer une équation cartésienne du plan* $\mathcal{R}$ *passant par* $A(2;-2;0)$ *et perpendiculaire à* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$.

Exercice 6 *:*

On considère les plans $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *d'équations respectives* $3x-2y-z+2=0$ *et* $x-2y-z-3=0$. *Etudier l'intersection de* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$.

Exercice 7 *:*

Calculer l'aire du triangle ABC dans les cas suivants :

1. $A(2;-1;1)$, $B(0;-3;2)$ *et* $C(6;3;-1)$.
2. $A(2;-1;1)$, $B(0;-3;2)$ *et* $C(2;-3;3)$.

Exercice 8 *:*

Soit $A(3;-2;4)$, $B(-2;1;3)$ *et* $C(1;1;a)$

1. *Comment choisir a pour que ABC soit un triangle rectangle en A ?*
2. *Calculer alors la mesure en degrés de l'angle géométrique* $\widehat{ABC}$.
3. *Comment choisir a pour que ABC soit un triangle rectangle en C ?*

Exercice 9 *:*

1. *Soit* $\mathcal{S}$ *une sphère de centre* Ω *et de rayon* R *non nul. La puissance d'un point* M *par rapport à la sphère* $\mathcal{S}$ *est :*
$$\chi_{\mathcal{S}}(M)=\overrightarrow{\Omega M}^2-R^2$$
   (a) *Caractériser les points* M *vérifiant* $\chi_{\mathcal{S}}(M)=0$.
   (b) *Caractériser les points* M *vérifiant* $\chi_{\mathcal{S}}(M)<0$.
   (c) *Caractériser les points* M *vérifiant* $\chi_{\mathcal{S}}(M)>0$.
2. *Soit deux sphères* $\mathcal{S}_1$ *et* $\mathcal{S}_2$ *de centres respectifs* Ω_1 *et* Ω_2 *et de rayons respectifs* R_1 *et* R_2.
   (a) *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les deux sphères* $\mathcal{S}_1$ *et* $\mathcal{S}_2$ *soient tangentes extérieurement.*
   (b) *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les deux sphères* $\mathcal{S}_1$ *et* $\mathcal{S}_2$ *soient tangentes intérieurement.*
   (c) *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les deux sphères* $\mathcal{S}_1$ *et* $\mathcal{S}_2$ *ne soient pas tangentes et que* $\mathcal{C}=\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$ *ne soit pas vide. Quelle est la nature de* $\mathcal{C}$ *? Dans la suite de l'exercice, nous nous plaçons dans ce cas.*
      i. *Quelle est le lieu géométrique* $\mathcal{P}$ *des points* M *vérifiant :*
$$\chi_{\mathcal{S}_1}(M)=\chi_{\mathcal{S}_2}(M)$$
      ii. *Que peut-on dire de* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{P}$ *?*
      iii. *Déterminer les éléments caractéristiques de* $\mathcal{C}$.