TD2 L2

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace à trois dimensions muni du repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan muni du repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.

Exercice 1 *: Fils, clôture et tempête*

1. *Suite à une tempête, une partie d'une ligne EDF a été détruite. Une équipe d'intervention vient pour réparer la ligne entre deux pylônes distants de* 1 *kilomètre. Cette équipe doit poser un poteau tous les* 100 *mètres.*
   (a) *Combien cela fait-il d'intervalles sur la zone endommagée ?*
   (b) *Combien doivent-ils apporter de poteaux neufs ?*
   (c) *Combien cela fait-il de poteaux sur toute la zone endommagée ?*
2. *Un paysan vient d'acheter un champ circulaire dont le périmètre fait* 1 *décamètre. Il a décidé de poser un poteau tous les mètres.*
   (a) *Combien cela fait-il d'intervalles ?*
   (b) *Combien doit-il acheter de poteaux ?*
3. *Soit* $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$. *Afin de limiter le nombre de calculs, les coordonnées des points sont stockés dans un tableau de taille idoine. Nous avons à notre disposition la fonction* `segment(A,B)` *qui trace le segment* $[AB]$ *(via l'affichage d'un cylindre de petit rayon).*
   Ecrire un algorithme permettant d'approcher :
   (a) *le demi-cercle de rayon* R *d'extrémités* $A\,(R; 0)$ *et* $B\,(-R; 0)$ *par une ligne brisée comportant* n *segments ;*
   (b) *le cercle de centre* $O\,(0; 0)$ *et de rayon* R *par un polygone à* n *côtés.*

Exercice 2 *:*

Considérons le rectangle $ABCD$ *donc les côtés* $[AD]$ *et* $[BC]$ *sont verticaux. Considérons la rotation* $\mathscr{R}_{\Delta,\theta}$ *d'axe* $\Delta = \left(O; \overrightarrow{k}\right)$ *et d'angle* θ. *Nous voulons, via la composition de* $\mathscr{R}_{\Delta,\theta}$ *avec elle-même, un certain nombre de fois, construire un prisme (non croisé) à partir du rectangle* $ABCD$.

1. *Soit* $A\,(-1; 1; 2)$, $B\,(1; 1; 2)$, $C\,(1; 1; 0)$ *et* $D\,(-1; 1; 0)$. *Que vaut* θ *et combien de compositions doit-on faire (à chaque étape, nous ne prenons que l'image du rectangle* $ABCD$*) ?*
2. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. *Soit les points* $A\,(-r\cos(\alpha); r\sin(\alpha); 2)$, $B\,(r\cos(\alpha); r\sin(\alpha); 2)$, $C\,(r\cos(\alpha); r\sin(\alpha); 0)$ *et* $D\,(-r\cos(\alpha); r\sin(\alpha); 0)$.

(a) *Nous souhaitons obtenir un prisme via la composition de $\mathscr{R}_{\Delta,\theta}$ avec elle-même, un certain nombre de fois, construire un prisme (non croisé) à n faces à partir du rectangle $ABCD$. Quelles sont les valeurs possibles pour α ?*

(b) *Que pouvez-vous dire concernant le prisme obtenu lorsque α tend vers $\frac{\pi}{2}$?*

3. *Le prisme est-il eulérien i.e. la formule :*

$$\#V - \#E + \#F = 2$$

est-elle vérifiée ? Pour rappel, $\#V$ est le nombre de sommets, $\#E$ est le nombre d'arêtes et $\#F$ est le nombre de faces. Sinon, comment le rendre eulérien ?

Exercice 3 *: Examen de juin 2006*

Soit la pyramide dont les sommets sont $A = (1;-1;0)$, $B = (-1;-1;0)$, $C = (-1;1;0)$, $D = (1;1;0)$ et $P(0;0;1)$, figure 1. La face F_1 est la face "avant ; F_2 la face de "droite" ; F_3 la face "arrière" ; F_4 la face de "gauche" et F_5 la face "dessous".

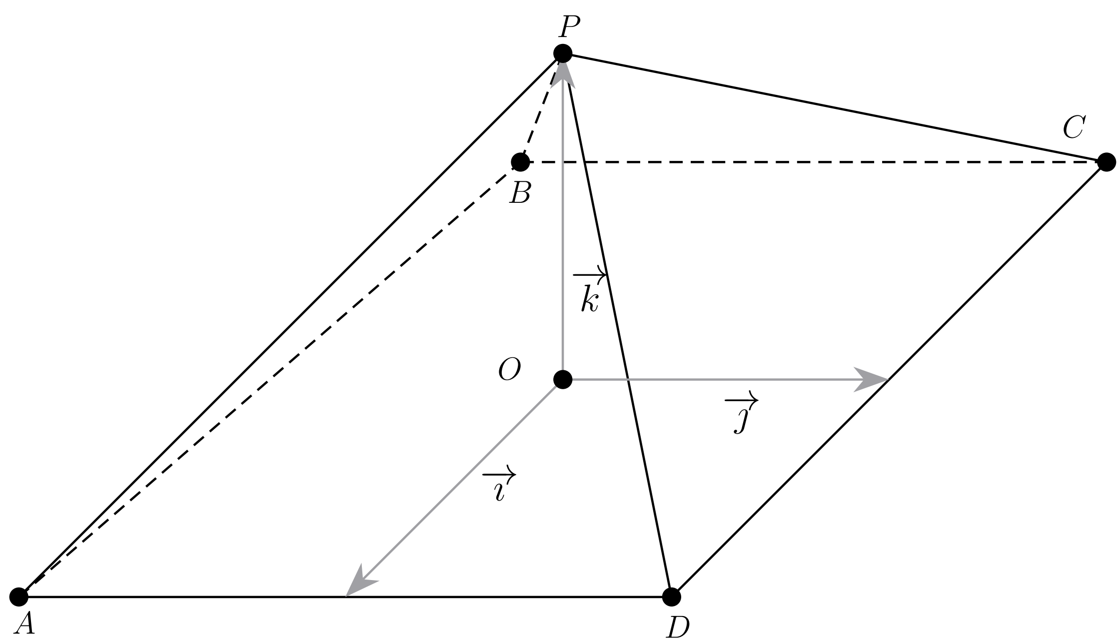

FIGURE 1 – Pyramide de l'exercice 3.

1. *Donner la description la plus complète possible de chacune des cinq faces sous la forme de :*

   (a) *description topologique ;*

   (b) *description géométrique.*

   Remarque : La normale à une face est supposée être égale à la normale en un sommet.

2. *L'observateur est en $\Omega(1,1,1)$. Quelle(s) face(s) de la pyramide voit-il ? Naturellement il faut justifier votre réponse. Pour qu'une face soit éventuellement visible, il faut que le vecteur normal, extérieur, à la face $\overrightarrow{N}$ et le vecteur issu de l'observateur au centre G de la face soient dans des « directions opposées » c'est-à-dire que nous devons avoir :*

$$\overrightarrow{\Omega G} \cdot \overrightarrow{N} < 0$$

(Note : ici le centre de chaque face est le barycentre dont les coordonnées sont les moyennes des coordonnées des sommets de la face). *Lien pour la pyramide (en mode présentation)*

Exercice 4 *:*

On considère le tétraèdre ayant pour sommets les points $A\,(2;0;0)$*,* $B\,(-1;1;0)$*,* $C\,(-1;-1;0)$ *et* $D\,(0;0;2)$*. Les faces du tétraèdre sont données par le tableau 1.*

Nom de la face	Points n'appartenant pas à la face
F_1	D
F_2	C
F_3	B
F_4	A

TABLE 1 – Faces du tétraèdre

1. *Faire une illustration 3D.*
2. *Déterminer les vecteurs normaux unitaires « sortants » de chaque face.*
3. *Pour* i*, entier compris entre* 1 *et* 4*, déterminer le centre de gravité* G_i *de la face* F_i*.*
4. *Pour* i*, entier compris entre* 1 *et* 4*, déterminer une équation cartésienne du plan défini par la face* F_i*.*
5. *L'observateur se trouve au point* $\Omega_0\,(-3;3;-1)$*. Déterminer, par calculs, les faces du tétraèdre visibles par l'observateur.*