TD3 L2

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace à trois dimensions muni du repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath}; \overrightarrow{k}\right)$.

Exercice 1 *:*

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan muni du repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.
B_0, B_1 et B_2 désignent les polynômes de Bernstein de degré 2 :

$$B_0(t) = (1-t)^2 \ , \ \ B_1(t) = 2\,t\,(1-t) \ , \ \ B_2(t) = t^2$$

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de $\mathcal{P}$. Une courbe de Bézier polynomiale quadratique, notée $BP(P_0; P_1; P_2)$, est définie par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\Omega M(t)} = B_0(t)\,\overrightarrow{\Omega P_0} + B_1(t)\,\overrightarrow{\Omega P_1} + B_2(t)\,\overrightarrow{\Omega P_2} \tag{1}$$

1. *Expliquer l'abus de notation suivant :*

$$M(t) = B_0(t)\,P_0 + B_1(t)\,P_1 + B_2(t)\,P_2$$

2. *Une interpolation linéaire ou combinaison convexe des points P_0 et P_1 est de la forme :*

$$(1-t)\,P_0 + tP_1, \quad t \in [0;1]$$

que l'on peut écrire

$$P_0 + t\,(P_1 - P_0) = P_0 + t\ \overrightarrow{P_0P_1}, \quad t \in [0;1]$$

Montrer que l'algorithme 1 permet de construire, point par point, une courbe de Bézier polynomiale quadratique $\mathcal{C}_P$ de points de contrôle P_0, P_1 et P_2, figure 1.

3. *Soit $P_0(0;0)$, $P_1\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ et $P_2(1;1)$. Soit $\mathtt{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.*

   (a) *Donner une équation paramétrique de $\mathtt{P}$.*

   (b) *Montrer que les points P_0 et P_2 appartiennent à la parabole $\mathtt{P}$.*

   (c) *Montrer que les droites (P_0P_1) et (P_2P_1) sont les tangentes à la parabole $\mathtt{P}$ aux points P_0 et P_2.*

   (d) *Montrer que nous avons :*

$$\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = B_0(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B_1(t)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + B_2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Que peut-on en déduire ? Peut-on généraliser ce résultat ?

   (e) *Soit I le milieu de $[P_0P_2]$. Que peut-on dire de la droite (IP_1) et de l'axe de la parabole ? (Nous admettons que ce résultat est toujours vrai i.e. ...).*

4. *Soit $Q_0(0;0)$ et $Q_2(2;2)$.*

Algorithme 1 : Méthode de De Casteljau

Entrée : Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de $\mathcal{P}$.

(a) Soit la famille de points $(N_1(t))_{t\in[0;1]}$ définie par :

$$\overrightarrow{\Omega N_1(t)} = (1-t)\,\overrightarrow{\Omega P_0} + t\overrightarrow{\Omega P_1}$$

(b) Soit la famille de points $(N_2(t))_{t\in[0;1]}$ définie par :

$$\overrightarrow{\Omega N_2(t)} = (1-t)\,\overrightarrow{\Omega P_1} + t\overrightarrow{\Omega P_2}$$

(c) Soit la famille de points $(N_3(t))_{t\in[0;1]}$ définie par :

$$\overrightarrow{\Omega N_3(t)} = (1-t)\,\overrightarrow{\Omega N_1\,(t)} + t\overrightarrow{\Omega N_2\,(t)}$$

Sortie : un arc de courbe de Bézier polynomiale défini par une courbe de Bézier de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 défini par :

$$\overrightarrow{\Omega M\,(t)} = B_0\,(t)\,\overrightarrow{\Omega P_0} + B_1\,(t)\,\overrightarrow{\Omega P_1} + B_2\,(t)\,\overrightarrow{\Omega P_2}$$

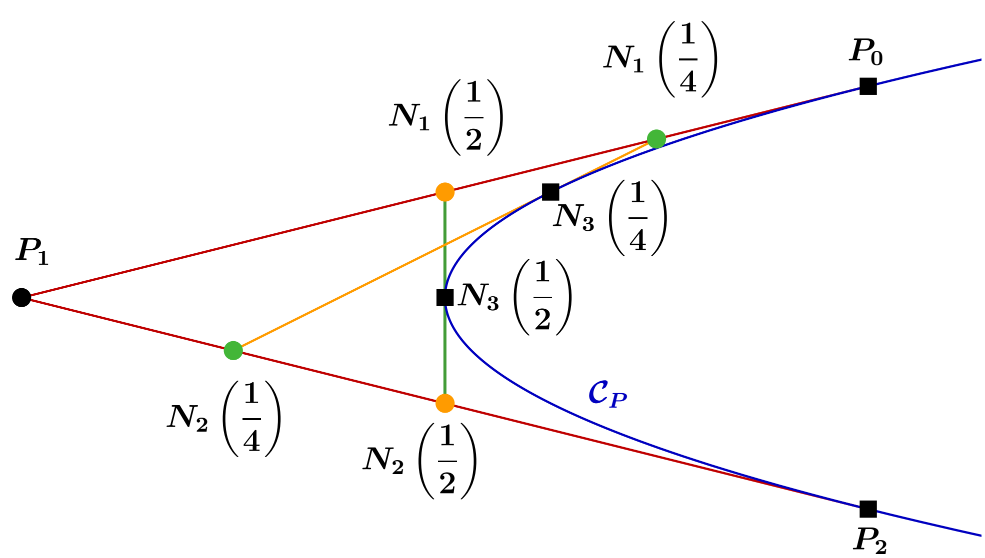

FIGURE 1 – Arc de courbe de Bézier polynomiale défini par une courbe de Bézier de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 obtenu en utilisant l'algorithme 1.

(a) *Déterminer une transformation affine $\mathscr{F}_1$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \mathscr{F}_1(P_0) &= Q_0 = P_0 \\ \mathscr{F}_1(P_2) &= Q_2 \end{cases}$$

(b) *Calculer les coordonnées de $Q_1 = \mathscr{F}_1(P_1)$ ainsi que l'équation paramétrique de l'arc de parabole définie par :*

$$BP(Q_0; Q_1; Q_2) = \mathscr{F}_1(BP(P_0; P_1; P_2))$$

5. *Soit $R_0(0;0)$ et $R_2(4;16)$.*

(a) *Déterminer une transformation affine $\mathscr{F}_2$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \mathscr{F}_2(P_0) &= R_0 = P_0 \\ \mathscr{F}_2(P_2) &= R_2 \end{cases}$$

(b) *Calculer les coordonnées de $R_1 = \mathscr{F}_2(P_1)$ ainsi que l'équation paramétrique de l'arc de parabole définie par :*

$$BP(R_0; R_1; R_2) = \mathscr{F}_2(BP(P_0; P_1; P_2))$$

(c) *Dérouler l'algorithme de De Casteljau sur la courbe $BP(R_0; R_1; R_2)$ pour t décrivant $\left\{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1\right\}$.*

Exercice 2 *: Linear_spline*

Comme son nom l'indique, il s'agit d'une interpolation linéaire. Dans le plan d'équation $z = 0$, on se donne six points $P_0\,(1,2;4;0)$, $P_1\,(0,8;3;0)$, $P_2\,(1,9;2,5;0)$, $P_3\,(2,2;1,5;0)$, $P_4\,(1,5;0,5;0)$ et $P_5\,(0,5;0;0)$.

1. *Dans le plan d'équation $z = 0$, tracer la courbe obtenue par interpolation linéaire de ces points.*
2. *Quelle est la surface obtenue par rotation de la courbe précédente autour de l'axe $(O, \overrightarrow{\jmath})$?*
3. *Comment obtenir une courbe lisse dans le plan d'équation $z = 0$ à partir des points précédents.*

Exercice 3 *: Bézier_spline*

On considère les ***polynômes de Bernstein de degré*** **3** *:*

$$\begin{array}{cc} B_0\,(t) = (1-t)^3 & B_1\,(t) = 3t\,(1-t)^2 \\ B_2\,(t) = 3t^2\,(1-t) & B_3\,(t) = t^3 \end{array} \tag{2}$$

La courbe de Bézier cubique de points de contrôle $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$ est l'ensemble des points $M(t),\ t \in [0;1]$ vérifiant la formule :

$$\forall t \in [0;1]\,,\ \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{3} B_i(t)\,\overrightarrow{OM_i} \tag{3}$$

1. *On admet que les propriétés vues pour les courbes quadratiques sont encore vraies à condition de les adapter. Rappelez-les.*
2. *Expliquer comment obtenir une jointure G^0-continue [1] entre deux courbes cubiques de Bézier de points de contrôle respectifs $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$ et $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$.*
3. *Expliquer comment obtenir une jointure G^1-continue [2] entre deux courbes cubiques de Bézier de points de contrôle respectifs $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$ et $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$.*
4. *Dans le plan d'équation $z = 0$, on se donne quatre points $P_0\,(0,6;4;0)$, $P_1\left(\frac{3}{2};3;0\right)$, $P_2\,(2;1;0)$, et $P_3\,(2;0;0)$.*
   - *(a) Dans le plan d'équation $z = 0$, tracer la courbe obtenue en utilisant le modèle de Bézier cubique de points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3.*
   - *(b) Quelle est la surface obtenue par rotation de la courbe précédente autour de l'axe $(O, \overrightarrow{\jmath})$?*
5. *Construire une seconde courbe de Bézier cubique tel que les courbes de Bézier de points de contrôles $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$ d'une part et $M_0 = P_3$, $M_1\,(?;?;0)$, $M_2\,(2;-3;0)$ et $M_3\,(1,5;-3,25;0)$ d'autre part soit de type G^1. En TP, réaliser la jointure des deux surfaces définies par ces courbes en utilisant une surface de révolution.*

---

1. Le dernier point de la première courbe est le premier point de la seconde courbe.
2. La jointure est G^0 et les vecteurs tangents au point de contact sont colinéaires.