NOTIONS MATHEMATIQUES USUELLES

TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES 2D

Soit un point P du plan representé par $(x,y)^T$ et P' = $(x',y')^T$ son image par une transformation affine.

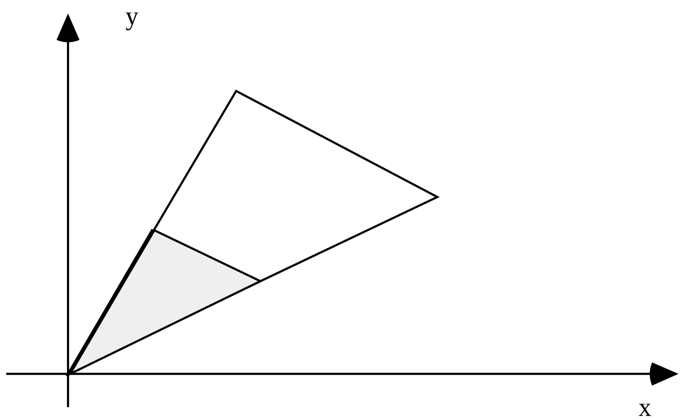
TRANSLATION :

$$P' \leftarrow P$$

$$\begin{cases} x' = x + dx \\ y' = y + dy \end{cases}$$

$$P' = P + T \quad \text{avec} \quad T = (dx, dy)^T$$

MISE A L'ECHELLE

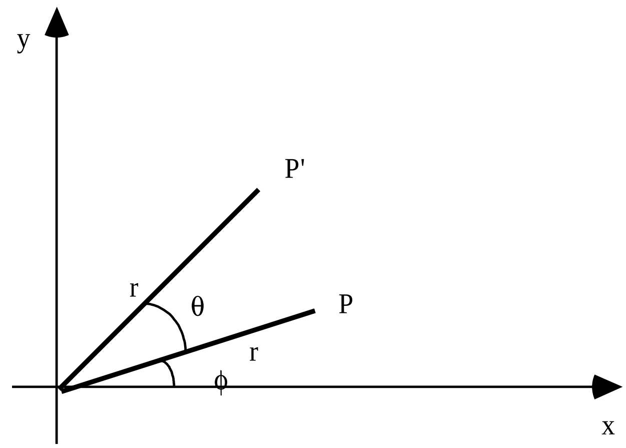


$$P' \leftarrow P$$

$$\begin{cases} x' = x \,.\, sx \\ y' = y \,.\, sy \end{cases}$$

$$P' = S \,.\, P \quad \text{avec} \quad S = \begin{bmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{bmatrix}$$

ROTATION / ORIGINE

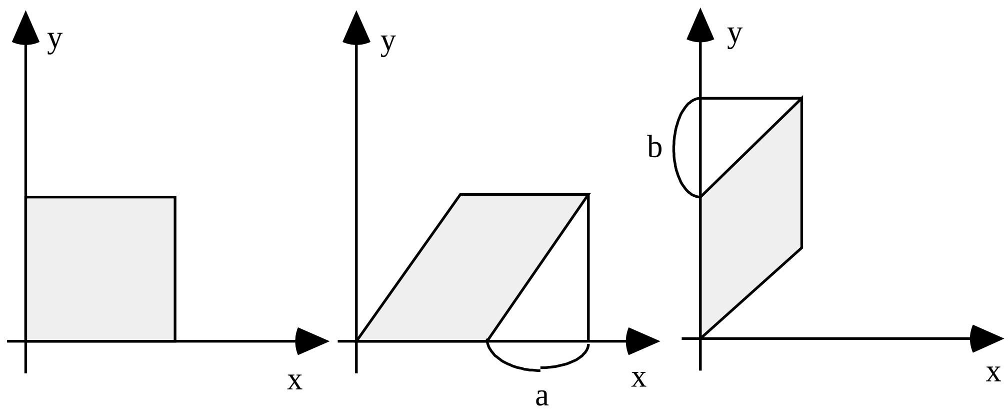


$P' \leftarrow P$

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{cases}$$

$$P' = R \cdot P \quad \text{avec} \quad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

BIAIS



$P' \leftarrow P$

$$\begin{cases} x' = x + a \cdot y \\ y' = y \end{cases}$$

$$P' = B_x \cdot P \quad \text{avec} \quad B_x = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P' \leftarrow P$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + b \cdot x \end{cases}$$

$$P' = B_y \cdot P \quad \text{avec} \quad B_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

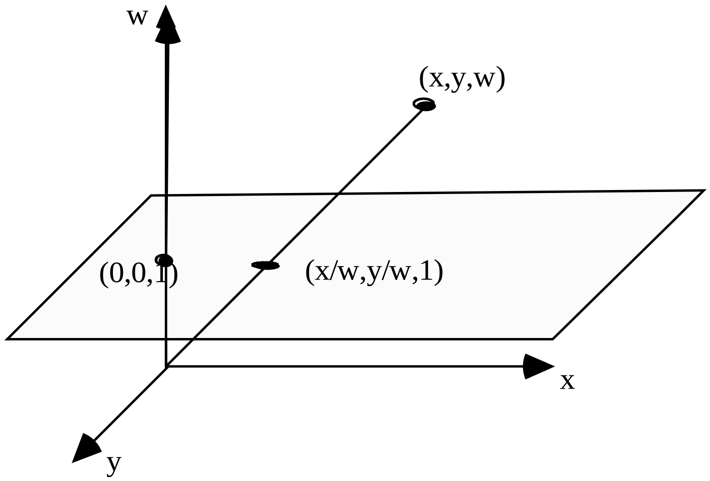
COORDONNEES HOMOGENES

Les représentations matricielles sont respectivement :

$$P' = P + T,\ P' = S.\ P\ ,\ P' = R\ .\ P$$

Pour traiter la translation (addition) comme la mise à l'échelle et la rotation (multiplications), on passe en coordonnées homogènes.

Un point P du plan devient $(X,Y,W)^T$ tel que $x = X/W$, $y = Y/W$ $(W \neq 0)$.



Les points (x,y,w) et (x',y',w') sont identiques si l'un est multiple de l'autre. (x,y,w) représente le même point que (x/w,y/w,1).
On peut voir le lien entre l'espace 2D des points euclidiens et leur représentation en 3D homogènes de la façon suivante : tous les triplets (tx,ty,tw) t 0 forment une droite en 3D. Chaque point homogène représente donc une droite en 3D. En homogénéisant ce point, il devient (x,y,1). Tous les points homogénéisés forment donc le plan w=1 dans l'espace (x,y,w).

On peut alors écrire : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ pour la translation

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ pour la mise à l'echelle

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ pour la rotation

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ pour le biais en x

Dès lors on ecrit : P' = T . P, P' = S . P , P' = R . P, P' = B_X . P

<u>TRANSFORMATIONS EN 3D</u>

On obtient (directement en coordonnées homogènes) :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & bx & 0 \\ 0 & 1 & by & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

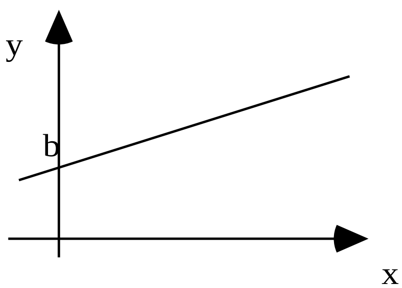
DROITES AFFINES

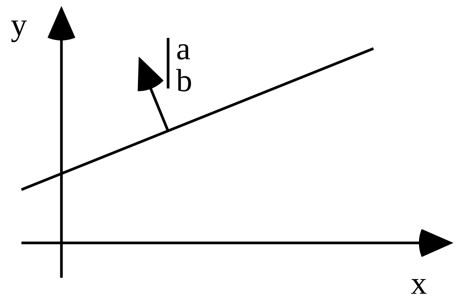
Forme explicite : $y = f(x) = ax + b$

Forme implicite : $f(x,y) = 0$

$ax + by + c = 0$

$(x\ y\ 1)\ (a\ b\ c)^T = 0$



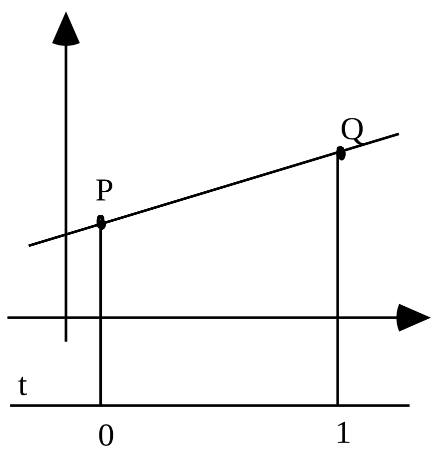


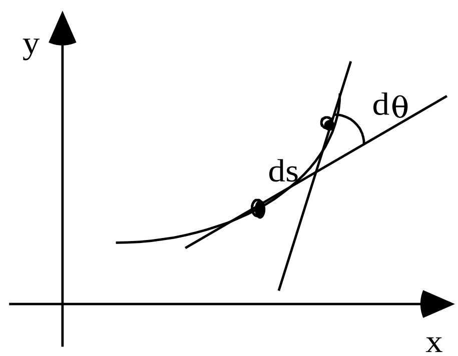
Forme paramétrique : $P + t\,(Q - P)$

$(1-t)\,P + t\,Q$

Forme intrinsèque : $1/\rho = \kappa = 0$

$\kappa = d\theta\,/ds$





?Distance d'un point $(r,s)^T$ à une droite implicite:

$$d = \frac{a.r + b.s + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \quad (1)$$

En effet : la distance du point R à la droite s'exprime comme la projection de (R-P) sur V (voir figure). Ce qui s'exprime par $\dfrac{(R - P)\,.\,V}{\|V\|}$ c'est à dire (1)

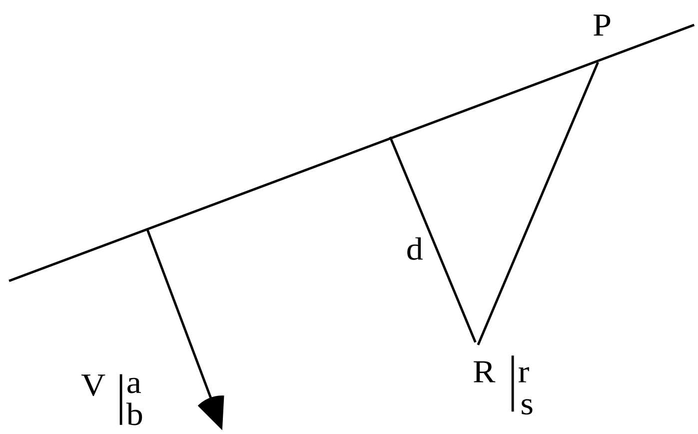
?Distance d'un point $(r,s)^T$ à une droite paramétrique : Soit P_0 un point de la droite et V la direction de la droite. On a $P(t) = P_0 + t.V$

d'où $(R - P(t)) . V = 0$

$(R - P_0 - t.V) . V = 0$

$$t = \frac{(R - P_0).V}{\|V\|}$$

ce qui est la valeur de t pour la distance "minimum" de R à la droite.



$$t = \frac{a\,(r - x_0) + b\,(s - y_0)}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

$$\text{d'où} \left| \begin{array}{l} dx = r - \left(x_0 + t.a\right) \\ dy = s - \left(y_0 + t.b\right) \end{array} \right\rangle \text{ et } d = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

<u>PLANS AFFINES</u>

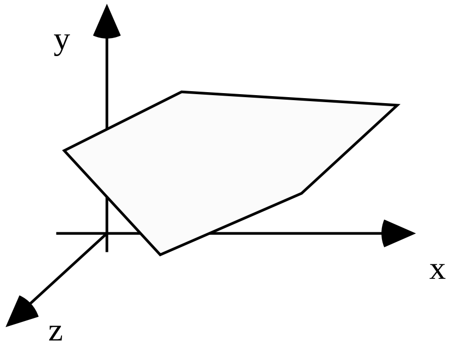
Forme explicite : $z = f(x,y)$

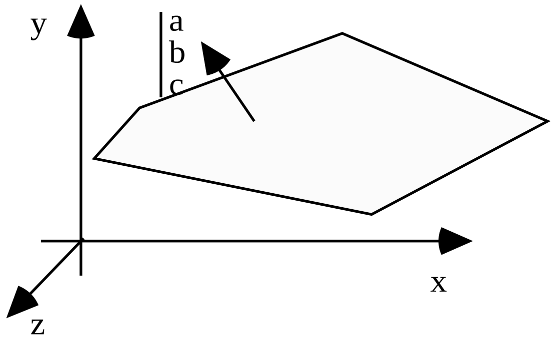
$z = ax + by + c$

Forme implicite : $f(x,y,z) = 0$

$ax + by + cz + d = 0$

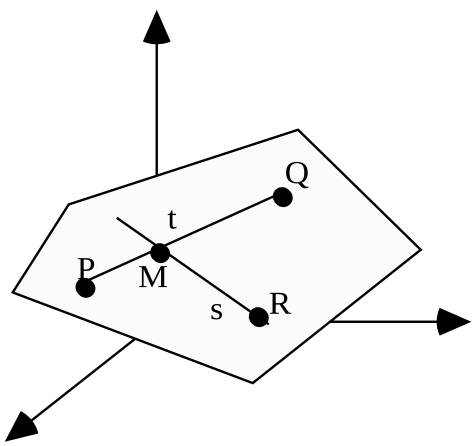
$(x\ y\ z\ 1)\ (a\ b\ c\ d)^T = 0$

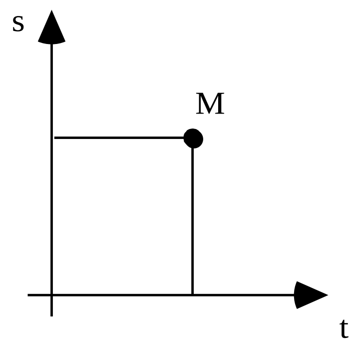




Forme paramétrique : on écrit que P, Q, R sont trois points non colinéaires, c'est à dire que R n'est pas sur la droite (PQ). On a donc :

$$(1 - s)[(1 - t)\, P + t\, Q] + s\, R$$

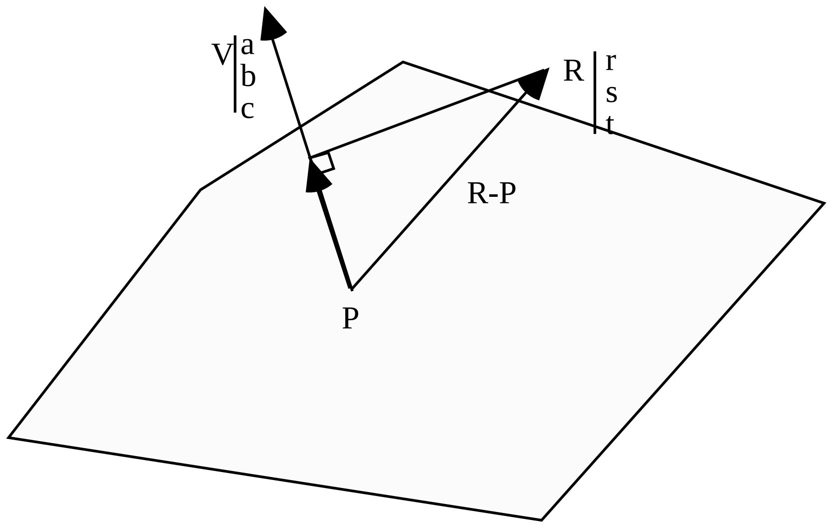




Distance d'un point $(r,s,t)^T$ à un plan implicite:

$$\Delta = \frac{a.r + b.s + c.t + d}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \quad (2)$$

En effet : la distance du point R au plan s'exprime comme la projection de (R-P) sur V (voir figure). Ce qui s'exprime par $\frac{(R - P) . V}{\|V\|}$ c'est à dire (2)



Distance d'un point M $(x,y,z)^T$ à un plan paramétrique : Soit P_0 un point du plan et A et B deux vecteurs inclus dans le plan. On a P(t) = P_0 + A u + B v

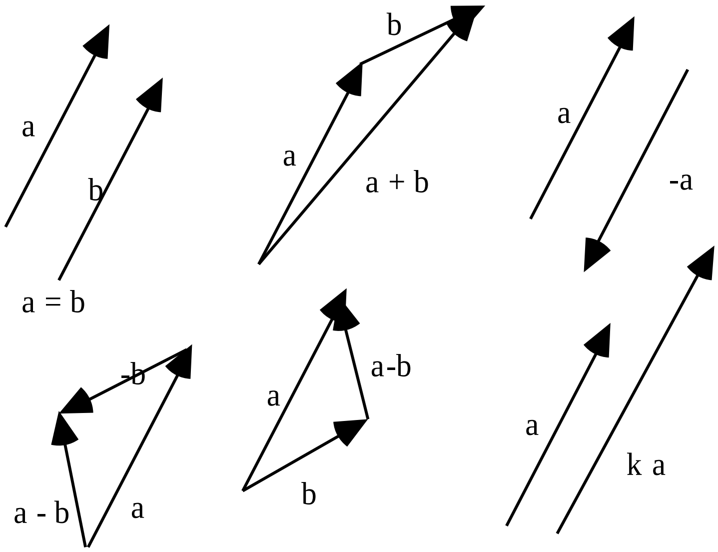
$$(M - (P + Au + Bv)). A = 0$$
$$(M - (P+ Au + Bv)). B = 0$$

soit
$$(M - P). A - u A.A - v B.A = 0$$
$$(M - P). B - u A.B - v B.B = 0$$

d'où

C est un système de 2 équations à 2 inconnues u et v. Il suffit de remplacer les valeurs solutions u et v dans l équation paramétrique du plan pour trouver le point le plus proche de M et ainsi calculer la distance de M au plan

VECTEURS



" Produit scalaire : $p\,.\,r = p_x r_x + p_y r_y + p_z r_z$

" Norme : $\|p\| = \sqrt{p\,.\,p} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$

" Vecteur unitaire : $n = \dfrac{p}{\|p\|}$

" Propriété : $p\,.\,r = \|p\|\,\|r\| \cos\theta$

soit encore $\cos\theta = \dfrac{p\,.\,r}{\|p\|\|r\|}$

" Orthogonalité : si $p \perp r$ alors $p.r = 0$

" Produit vectoriel : $p \quad r = (p_y r_z - p_z r_y)\, i + (p_z r_x - p_x r_z)\, j + (p_x r_y - p_y r_x)\, k$

$$p \otimes r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_x & p_y & p_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

" si $p \quad r = s$ alors $p \perp s$ et $r \perp s$

" $p \quad r = \|p\|\,\|r\|\, n \sin\theta$ avec $p \perp n$ et $r \perp n$