Logique propositionnelle

O. Bailleux - Version 2014

Eléments lexicaux

$\underbrace{\wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \neg}_{\boxed{\text{connecteurs}}}$ $\underbrace{(\quad)}_{\boxed{\text{parenthèses}}}$ $\underbrace{\textbf{Vrai} \quad \textbf{Faux}}_{\boxed{\text{constantes}}}$

$\underbrace{\text{a, b, c, d, … pluie, nuages, rouge, vert …}}_{\boxed{\text{variables}}}$

Formules

Syntaxe des formules de la logique des propositions :

Vrai **Faux** variable

(	formule	)

¬	formule

formule	∧	formule	conjonction
formule	∨	formule	disjonction
formule	→	formule	implication

Règles de priorités et associativité

$\neg$ est prioritaire par rapport à $\wedge$, $\vee$, et $\rightarrow$

$\wedge$ est prioritaire par rapport à $\vee$ et $\rightarrow$

$\vee$ est prioritaire par rapport à $\rightarrow$

Les connecteurs binaires sont associatifs à gauche.

Exemple :

$$\neg a \vee b \wedge \neg c \rightarrow d \vee c$$

$$\downarrow$$

$$((\neg a) \vee (b \wedge (\neg c)) \rightarrow (d \vee c)$$

Interprétation de variables

Une valeur de vérité est associée à chaque variable :

a	Vrai
b	Faux
c	Vrai

Une interprétation des variables a, b, c

n variables → 2^n interprétations

Une interprétation peut représenter un scénario, une situation :

p = Vrai → Il pleut

p = Faux → Il ne pleut pas

Interprétation d'une formule

Valeur de vérité déduite de l'interprétation des variables

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \rightarrow b$	$\neg a$
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Vrai	Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux	Faux	Vrai	Vrai

Exemples :

$$(\neg a \vee b) \rightarrow a \xrightarrow{\{a=\text{Vrai},\ b=\text{Vrai}\}} \textbf{Vrai}$$

$$(\neg a \vee b) \rightarrow a \xrightarrow[\{a=\text{Faux},\ b=\text{Vrai}\}]{} \textbf{Faux}$$

Satisfaire ou falsifier une formule

Soit une formule X et une interprétation I des variables de X :

P **satisfait** X : P rend la formule X vraie.
On dit que P est un **modèle** de X.

P **falsifie** X : P rend la formule X fausse.

Exemples :

{a=Vrai, b=Vrai} **est un modèle de** $(\neg a \vee b) \rightarrow a$

{a=Faux, b=Vrai} **falsifie** $(\neg a \vee b) \rightarrow a$

Validité et satisfaisabilité

Une formule est dite satisfaisable si et seulement si elle admet au moins un modèle.

$(\neg a \lor b) \rightarrow a$

admet le modèle {a=Vrai, b=Vrai} donc est satisfaisable

falsifiée par {a=Faux, b=Vrai} donc n'est pas valide

Une formule est dite valide si toutes les interprétations de ses variables sont des modèles

$(a \land b) \lor (a \land \neg b) \lor \neg a$

a	b	
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

valide !

Modélisation logique

Les variables représentent des faits pouvant être vrais ou faux :

p : Il pleut → Vrai / Faux

n : Il y a des nuages → Vrai / Faux

Modélisation logique

Les interprétations représentent des scénarios où évènements qui peuvent être possibles ou impossibles dans un univers particulier :

p	n	
Vrai	Vrai	Il pleut et il y a des nuages
Vrai	Faux	Il pleut et il n'y a pas de nuage
Faux	Vrai	Il ne pleut pas et il y a des nuages
Faux	Faux	Il ne pleut pas et il n'y a aucun nuage

Le but est de modéliser par une formule une ou plusieurs règles exprimées dans un autre formalisme (par exemple la langue française).

Modélisation logique

Il ne pleut jamais lorsqu'il n'y a pas de nuage

La formule doit être **falsifiée** par toute interprétation qui décrit un scénario **interdit** par les règles

p	n	Interdit ?	Valeur de vérité de la formule
Vrai	Vrai	non	Vrai
Vrai	Faux	**oui**	**Faux**
Faux	Vrai	non	Vrai
Faux	Faux	non	Vrai

$\neg p \vee n$

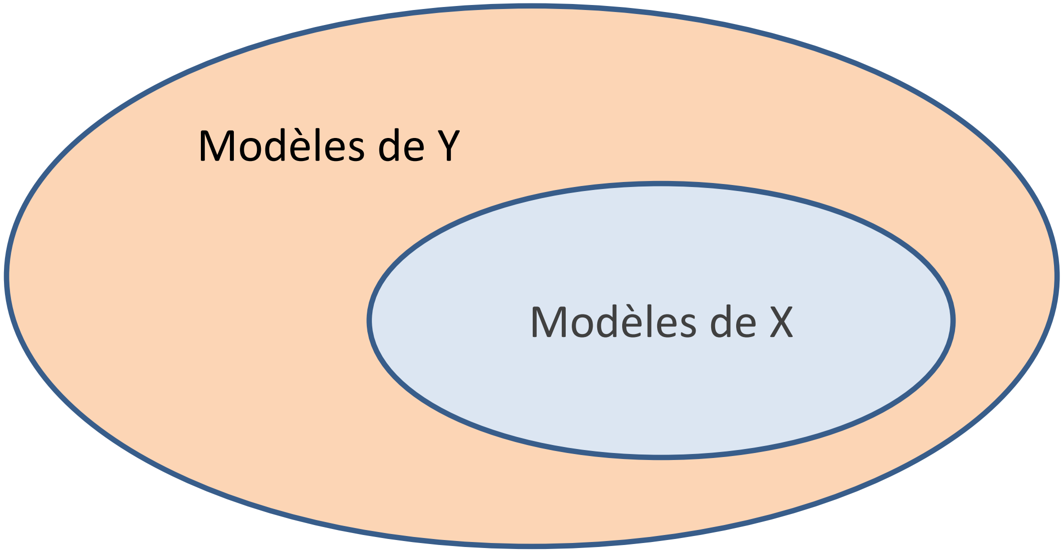
$p \rightarrow n$

Ces deux formules sont des modélisations correctes de la règle exprimée.

Conséquence logique

$$X \vDash Y$$

Signifie que la formule Y est **conséquence logique** de la formule X, c'est-à-dire que tout modèle de X est un modèle de Y



Conséquence logique

Le symbole $\vDash$ n'est pas un connecteur logique

$$\underbrace{\overbrace{a \wedge b}^{\text{Ceci est une formule propositionnelle}} \quad \vDash \quad \overbrace{a \vee b}^{\text{Ceci est une formule propositionnelle}}}_{\text{Ceci n'est pas une formule propositionnelle. C'est l'énoncé d'une propriété mathématique reliant deux formules propositionnelles}}$$

Ceci n'est pas une formule propositionnelle. C'est l'énoncé d'une propriété mathématique reliant deux formules propositionnelles

Conséquence logique

Théorème :

Soient A et B deux formules propositionnelles.

$A \vDash B$ si et seulement si $A \rightarrow B$ est valide

Exemple :

$a \wedge b \quad \vDash \quad a \vee b$

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
Vrai	Vrai	**Vrai**	**Vrai**
Vrai	Faux	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Faux	Vrai
Faux	Faux	Faux	Faux

$a \wedge b \rightarrow a \vee b$ est valide

a	b	$a \wedge b \rightarrow a \vee b$
Vrai	Vrai	**Vrai**
Vrai	Faux	**Vrai**
Faux	Vrai	**Vrai**
Faux	Faux	**Vrai**