Logique propositionnelle : formule, interprétation

Syntaxe

Une formule propositionnelle est construite à partir des éléments suivants :

Variables propositionnelles	$a\ b\ c\ x\ y\ \ldots$
Connecteurs logiques	$\neg\ \wedge\ \vee\ \rightarrow$
Constantes propositionnelles	vrai faux
parenthèses	( )

Dans l'ordre où ils sont présentés dans le tableau ci-dessus, les connecteurs sont appelés négation (non), conjonction (et), disjonction (ou), et implication. Une formule est soit une variable, soit une constante, soit une conjonction, disjonction ou implication de deux formules, soit la négation d'une formule, soit une formule entre parenthèses. Les constantes vrai et faux peuvent être abrégées par les lettres V et F.

Les connecteurs logiques sont associatifs à gauche et leur priorité est (du plus au moins prioritaire) : $\neg\ \wedge\ \vee\ \rightarrow$. Donc par exemple la formule $\neg a \vee b \wedge c \rightarrow \mathrm{d} \vee c$ peut se réécrire $(\neg a \vee (b \wedge c)) \rightarrow (\mathrm{d} \vee c)$.

Interprétation

Une *interprétation* d'un ensemble de variables est une fonction associant une valeur de vérité (vrai ou faux) à chaque variable de cet ensemble. Par exemple, il existe 8 interprétations possibles pour l'ensemble $\{a, b, c\}$, qui peuvent être notées $\{a = F, b = \mathrm{F}, c = \mathrm{F}\}$, $\{a = F, b = \mathrm{F}, c = V\}$, etc.

A toute interprétation des variables d'une formule correspond une valeur de vérité de cette formule, qui peut être déterminée à l'aide des tables de vérités spécifiant la sémantique des connecteurs logiques, à savoir :

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \rightarrow b$	$\neg a$
V	V	V	V	V	F
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V

> Recherchez une formule ayant la même table de vérité que $a \rightarrow b$ mais n'utilisant pas le connecteur implique.

Satisfaire ou falsifier

Soient une formule Σ. On note $\mathrm{Var}(\Sigma)$ l'ensemble des variables de cette formule. On dit d'une interprétation I de $\mathrm{Var}(\Sigma)$ *satisfait* Σ si et seulement si elle donne à Σ la valeur de vérité `vrai`. On dit que I de *falsifie* Σ si et seulement si elle donne à Σ la valeur de vérité `faux`.

Par exemple, la formule $a \vee b \vee c$ est falsifiée par l'interprétation $\{a = F, b = F, c = F\}$ et est satisfaite par l'interprétation $\{a = F, b = F, c = V\}$.

On dit de toute interprétation qui rend une formule vraie qu'elle est un *modèle* de cette formule.

Recherchez une interprétation qui satisfait la formule $(\neg a \vee b) \rightarrow a$ et une interprétation qui falsifie cette formule.

Formule valide, satisfaisable

On dit qu'une formule est *valide* si et seulement si elle est satisfaite par toutes les interprétations de ses variables. On dit qu'elle est *satisfaisable* si et seulement si elle est satisfaite par au moins une interprétation de ses variables. Les algorithmes les plus rapides connus actuellement mettent un temps exponentiel dans le pire des cas pour déterminer si une formule est valide.

La formule $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee \neg a$ est-elle satisfaisable ? Est-elle valide ?

La formule :
$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge$
$(a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b)$
est-elle satisfaisable ? Est-elle valide ?

Un homme portant une grande cape et un chapeau sonne à votre porte. Il vous remet une feuille de papier sur laquelle est décrit un algorithme permettant de déterminer en temps polynomial dans le pire des cas si une formule propositionnelle quelconque est *satisfaisable*. Puis l'homme mystérieux s'enfuit. Avez-vous entre les mains un moyen de créer un programme permettant de déterminer en temps polynomial la *validité* de n'importe quelle formule propositionnelle ? Justifiez votre réponse.

Conséquence logique

On dit qu'une formule Y est *une conséquence logique* d'une formule X si et seulement si tout modèle de X est un modèle de Y. Cette propriété est notée : $X \models Y$.

Attention : le symbole $\models$ n'est pas un connecteur logique et de ce fait l'expression $X \models Y$ n'est pas une formule de la logique propositionnelle. C'est juste une notation pour exprimer une propriété qui relie deux formules propositionnelles.

Il a toutefois été démontré que pour toutes formules X et Y, $X \rightarrow Y$ est valide si et seulement si $X \models Y$ et vous pouvez vous appuyer sur cette propriété pour déterminer si une formule est conséquence logique d'une autre.

L'affirmation suivante est-elle exacte ? Justifiez votre réponse.

$$\big((a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)\big) \models \big(a \rightarrow (b \vee c)\big)$$

Modélisation propositionnelle

En modélisation propositionnelle, les variables représentent des faits pouvant être vrais ou faux, une interprétation représente un scénario ou un évènement regroupant un ensemble de faits. On dit alors qu'une formule Σ modélise une certaine propriété P si et seulement si tous les scénarios qui ne sont pas en contradiction avec P satisfont Σ.

Prenons un exemple dans lequel il y a deux faits à exprimer :

- *Il pleut*, représenté par une variable propositionnelle p,
- *Il y a des nuages*, représenté par une variable n.

On souhaite modéliser la propriété suivante : « Il ne pleut jamais lorsqu'il n'y a pas de nuage ». Peu importe que cette propriété soit vérifiée ou pas dans la réalité. On pourrait imaginer qu'elle soit vraie sur certaines planètes et pas sur d'autres. Et peu importe le sens des mots pluie et nuage. Même si dans une certaine langue le verbe pleuvoir signifiait qu'il fait nuit et le mot nuage désignait une tarte aux prunes, cela ne devrait pas changer le résultat de la modélisation.

La formule qu'on recherche doit être falsifiée par toutes les interprétations qui sont en contradiction avec la propriété exprimées, et seulement par ces interprétations. Examinons ces 4 interprétations et regardons lesquelles sont en contradiction avec la propriété :

p	n	évènement	en contradiction avec la propriété à modéliser ?
vrai	vrai	Il pleut et il y a des nuages.	non
vrai	faux	Il pleut et il n'y a pas de nuage.	**oui**
faux	vrai	Il ne pleut pas et il y a des nuages.	non
faux	faux	Il ne pleut pas et il n'y a pas de nuage.	non

Une solution est la formule $p \rightarrow n$.

Cette solution est valable quel que soit le sens du verbe pleuvoir et du mot nuage. C'est simplement une formule qui est satisfaite par toutes les interprétations qui ne sont pas en contradiction avec la propriété exprimée.

La logique n'est pas la science de la vérité, c'est la science de la déduction.

On considère 4 lampes dont les états sont représentés par les variables propositionnelles x1, x2, x3, x4. Par convention, chaque variable xi vaut vrai si et seulement si la lampe associée est allumée. Donnez une formule aussi courte que possible qui modélise précisément la proposition suivante : « Si la lampe i est allumée alors toutes les lampes de numéros inférieurs à i (si applicable) sont aussi allumées. »