Introduction à la logique du premier ordre

O. Bailleux - Université de Bourgogne - 2017

Termes fonctionnels

Syntaxe des termes fonctionnels

Termes fonctionnels

$$\overbrace{\mathrm{prod}/2 \qquad \mathrm{succ}/1 \qquad \mathrm{zero}/0}^{\text{symboles fonctionnels}}$$

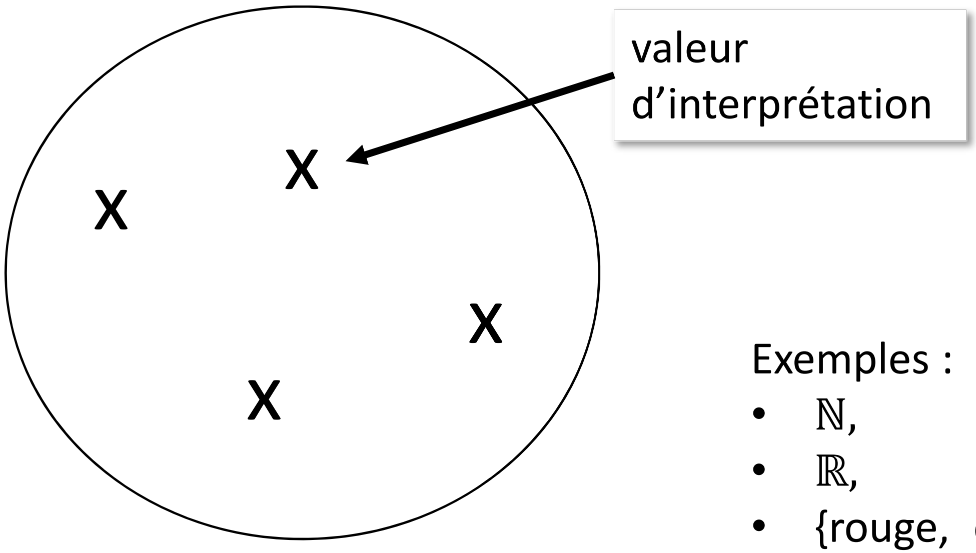
$$\underbrace{\mathrm{prod}(x, \mathrm{succ}(\mathrm{zero}))}_{\text{terme fonctionnel}}$$

Les **termes fonctionnels** sont des parties de formules construites à partir de **symboles fonctionnels** et de variables. Chaque symbole fonctionnel (ou identificateur de fonction) a une **arité** qui détermine le nombre d'**arguments** des termes fonctionnels qui seront construits à partir de ce symbole.

Domaine d’interprétation

Termes fonctionnels

Domaine d’interprétation **D**



Exemples :

- $\mathbb{N}$,
- $\mathbb{R}$,
- {rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo, violet}

Les symboles fonctionnels ont vocation à représenter des fonctions définies à partir d’un ensemble appelé **domaine d’interprétation**. Les éléments de cet ensemble sont appelés **valeurs d’interprétation**. Ce domaine peut être n’importe quel ensemble, de n’importe quelle cardinalité finie ou infinie, comme par exemple l’ensemble des entiers naturels, des réels, ou encore des couleurs de l’arc en ciel...

Interprétation des symboles fonctionnels

Termes fonctionnels

Symbole d'arité 0 ⇒ $\alpha \in \mathrm{D}$

Symbole d'arité 1 ⇒ $f : \mathrm{D} \mapsto \mathrm{D}$

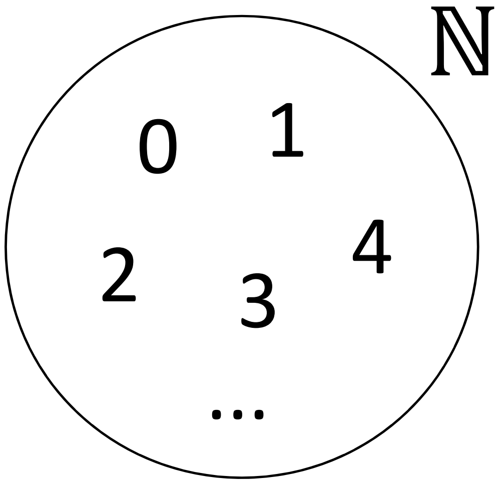
Symbole d'arité 2 ⇒ $f : \mathrm{D} \times \mathrm{D} \mapsto \mathrm{D}$

Dans toute interprétation ayant pour domaine un ensemble D, chaque symbole fonctionnel d'arité 0 désigne une valeur de D, et chaque symbole d'arité n > 0 désigne une fonction qui à toute liste de n valeurs de D associe une valeur de D. Un symbole d'arité 1 désigne donc une fonction de D dans D. Un symbole d'arité 2 une fonction de D x D dans D, etc.

Exemple : interprétation 1

Termes fonctionnels

Domaine



Interprétation des symboles

zero / 0 ⇨ 0

succ /1 ⇨ $x \mapsto x + 1$

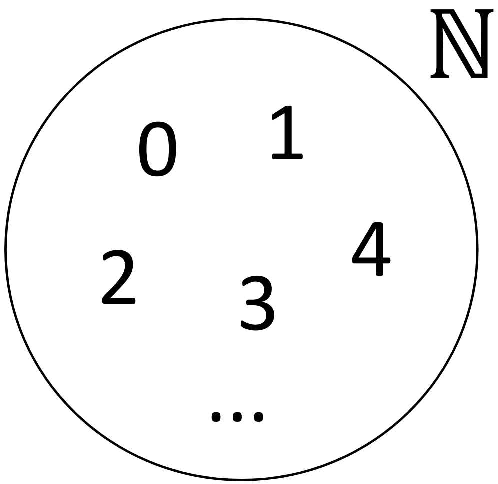
prod /2 ⇨ $(x, y) \mapsto xy$

Dans ce premier exemple, le domaine d’interprétation est l’ensemble des entiers naturels, le symbole zero représente la valeur 0, le symbole succ désigne la fonction qui a x associe x+1 et prod(x,y) représente x fois y.

Exemple : interprétation 2

Termes fonctionnels

Domaine



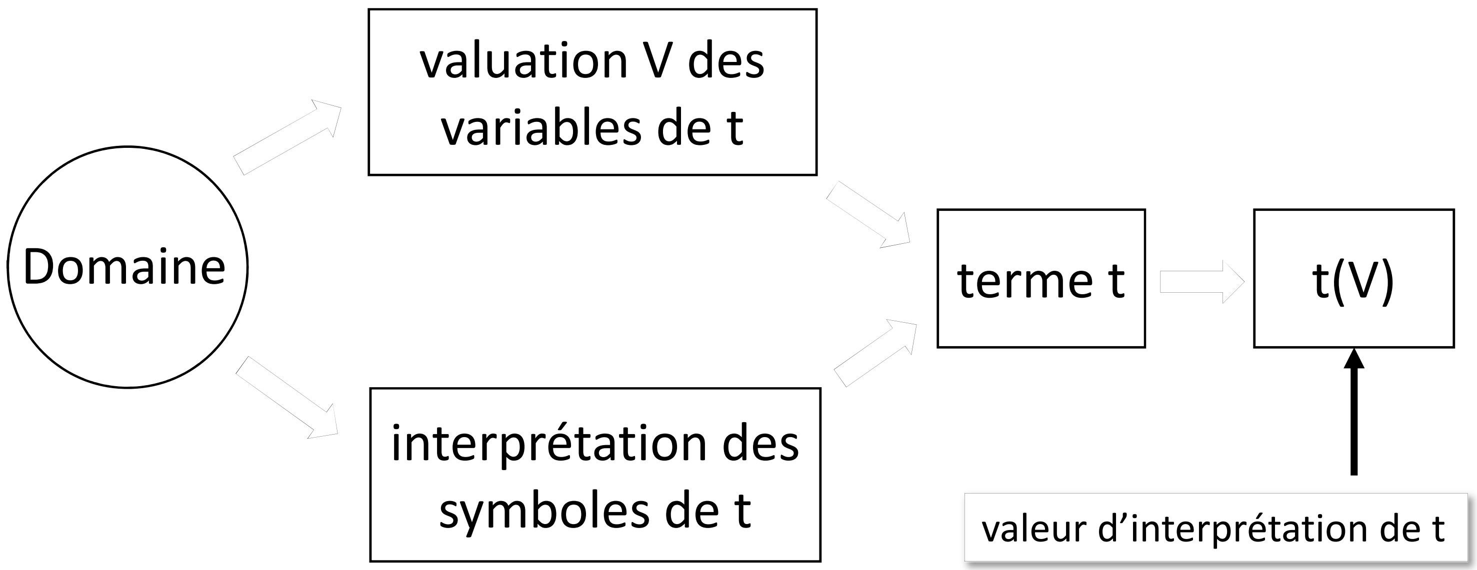
Interprétation des symboles

- zero / 0 ⇒ 1
- succ /1 ⇒ $x \mapsto x$
- prod /2 ⇒ $(x, y) \mapsto y$

Alors que dans ce deuxième exemple, avec le même domaine, le symbole zero représente la valeur 1, succ(x) désigne x et prod(x,y) représente juste y. Cette deuxième interprétation peut paraitre moins « naturelle », mais elle est aussi légitime que la première. Les interprétations 1 et 2 sont juste deux exemples parmi une infinité d'interprétations des symboles zero, succ et prod.

Valeur d’un terme fonctionnel

Termes fonctionnels



On appelle **valuation** d’un ensemble de variables le fait d’attribuer à chaque variable de cet ensemble une valeur du domaine d’interprétation. Toute interprétation des symboles d’un terme fonctionnel et toute valuation de ses variables donnent à ce terme une valeur particulière du domaine d’interprétation.

Exemple 1

Termes fonctionnels

Interprétation 1 :
Domaine $\mathbb{N}$,
succ(x) = x+1,
prod(x,y) = xy.

Valuation :
x = 1
y = 2

prod(x, succ(y))

3

Avec notre premier exemple d’interprétation, pour la valuation x=1 et y=2, au regard du sens donné par cette interprétation aux termes prod et succ, le terme prod(x, succ(y)) a pour valeur 3.

Exemple 2

Termes fonctionnels

Interprétation 2 :
Domaine ℕ,
succ(*x*) = *x*,
prod(*x*,*y*) = *y*.

Valuation :
x = 1
y = 2

prod(*x*, succ(*y*)) ⇒ 2

Alors qu'avec le deuxième exemple d'interprétation, pour la même valuation x=1 et y=2, le même terme prod(x, succ(y)) a une valeur différente, en l'occurrence 2, parce que dans cette deuxième interprétation, les symboles fonctionnels prod et succ n'ont par le même sens.

Atomes

Syntaxe des atomes

$$\overbrace{\mathrm{egal}/2 \qquad\qquad\qquad \mathrm{pair}/1}^{\text{symboles de prédicat}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\underbrace{\mathrm{egal}(x, \mathrm{succ}(y)) \qquad\qquad \mathrm{pair}(x)}_{\text{atomes}}$$

Atomes

Les **atomes** sont des formules construites à partir de **symboles de prédicats** et de variables. Chaque symbole de prédicat (ou identificateur de prédicat) a une **arité** qui détermine le nombre d’**arguments** des atomes qui seront construits à partir de ce symbole. Ni les atomes, ni les termes fonctionnels ne peuvent avoir des atomes comme arguments.

Interprétation des symboles de prédicats

Atomes

Symbole d'arité 0	vrai ou faux
Symbole d'arité 1	$f : \mathrm{D} \mapsto \{\mathrm{vrai}, \mathrm{faux}\}$
Symbole d'arité 2	$f : \mathrm{D} \times \mathrm{D} \mapsto \{\mathrm{vrai}, \mathrm{faux}\}$

La sémantique des symboles de prédicats d'une formule est basée sur le même domaine d'interprétation que ses symboles fonctionnels. Mais dans toute interprétation basée sur un domaine D, tout symbole de prédicat d'arité 0 représente une **valeur de vérité vrai** ou **faux**, et tout symbole de prédicat d'arité n > 0 représente une fonction qui à toute liste de n valeurs de D associe une valeur de vérité.

Exemple : interprétation 1

Atomes

domaine : $\mathbb{N}$

symboles fonctionnels

zero / 0	0
succ /1	$x \mapsto x+1$
prod /2	$(x,y) \mapsto xy$

symboles de prédicats

pair /1	pair(x) = vrai si et seulement si x est multiple de 2
egal /2	egal(x,y) = vrai si et seulement si x = y

Voici notre premier exemple d'interprétation des symboles fonctionnels complété avec une interprétation des symboles de prédicats pair et egal dans laquelle le symbole prédicat pair a le sens de la notion standard de parité (pair(x) est vrai si et seulement si x est multiple de deux) et le symbole egal représente l'égalité standard : tout élément du domaine d'interprétation est égal à lui même et seulement à lui-même.

Exemple : interprétation 2

domaine : $\mathbb{N}$

symboles fonctionnels

zero / 0	1
succ /1	$x \mapsto x$
prod /2	$(x, y) \mapsto y$

symboles de prédicats

pair /1	pair(x) = vrai si et seulement si x est multiple de 3
egal /2	egal(x,y) = vrai si et seulement si x = y

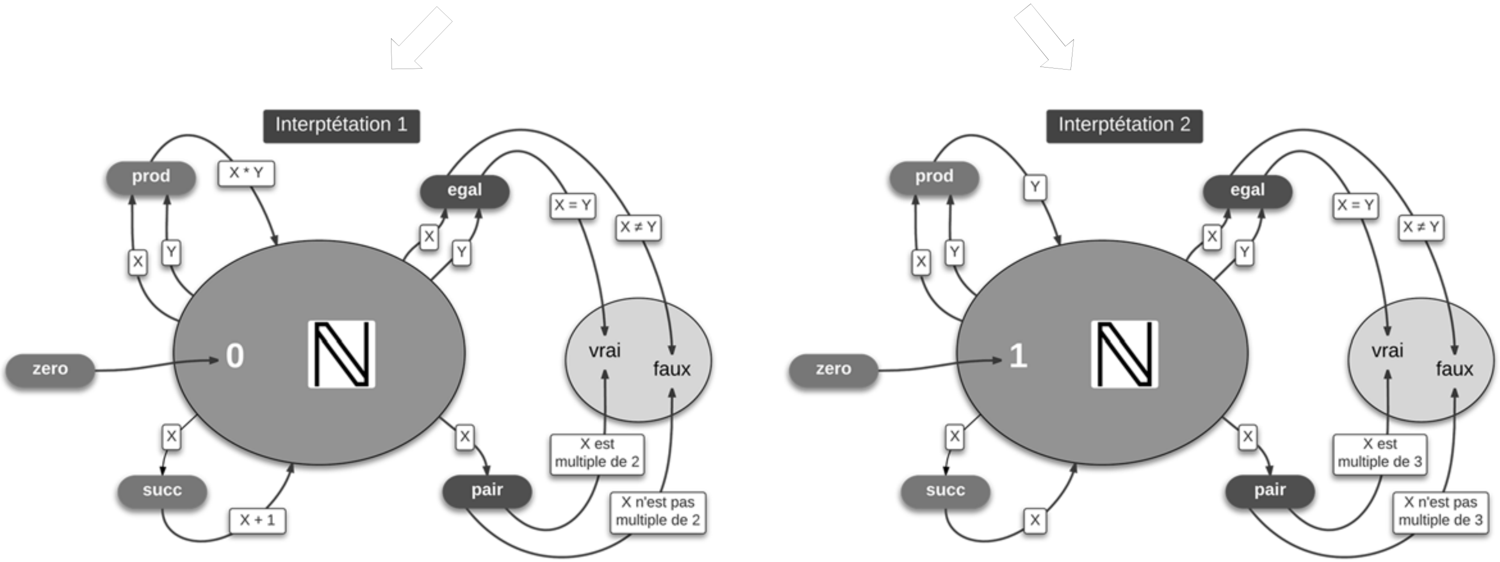
Atomes

Et voici notre deuxième exemple d'interprétation complété avec une interprétation des symboles de prédicats pair et egal dans laquelle pair(x) est vrai si et seulement si x est multiple de trois et le symbole egal a le même sens que dans l'interprétation précédente.

Deux interprétations d’une même signature

Atomes

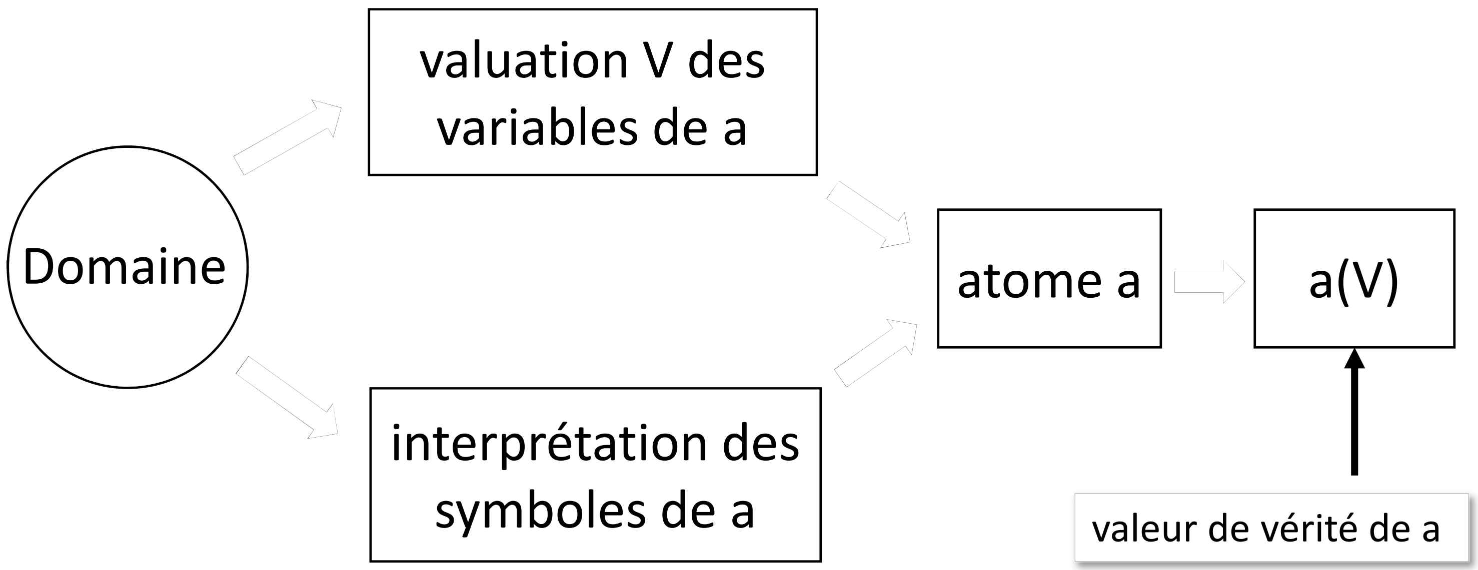
Signature : $(\{\mathrm{zero}/0, \mathrm{succ}/1, \mathrm{prod}/2\}, \{\mathrm{pair}/1, \mathrm{egal}/2\})$



Nos deux exemples d’interprétations concernent les mêmes symboles fonctionnels et symboles de prédicats. Ces symboles peuvent être regroupés dans une **signature** qui indique leurs types et leurs arités. On dira de toute formule n’utilisant pas d’autres symboles qu’elle est **compatible** avec cette signature. Toute signature admet une infinité d’interprétations possibles.

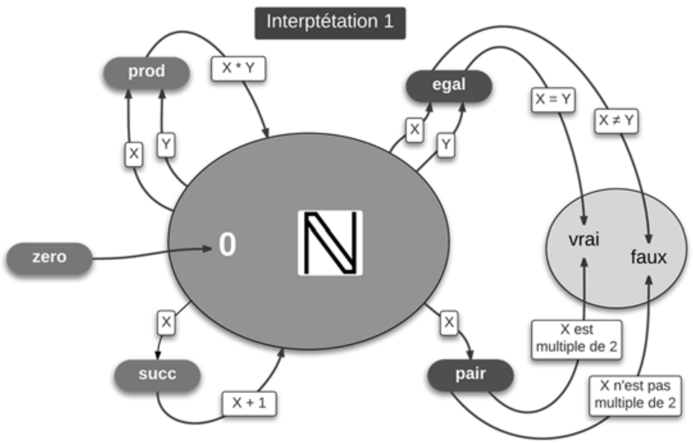
Valeur d'un terme atome

Atomes



Tout comme pour un terme fonctionnel, toute interprétation des symboles d'un atome (c'est à dire de son symbole de prédicat et des symboles fonctionnels présents dans ses arguments) et toute valuation de ses variables donnent à cet atome une valeur. Mais cette valeur n'est pas une valeur du domaine d'interprétation, comme pour les termes fonctionnels. C'est une valeur de vérité : vrai ou faux.

Exemple 1



Valuation :
x = 1
y = 2

egal(prod(*x*, y), succ(y))

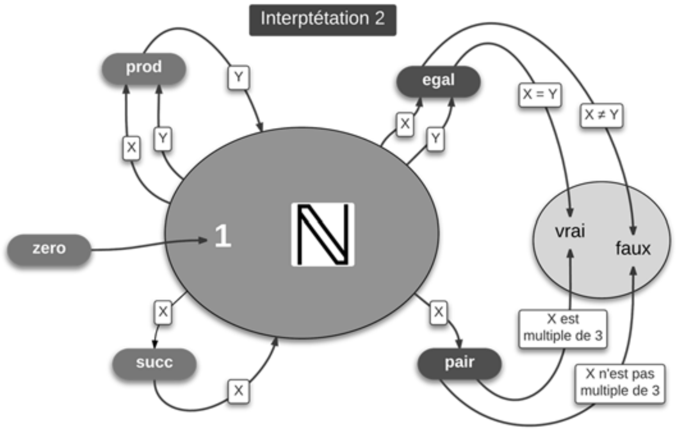
faux

Atomes

Avec le premier exemple d'interprétation, pour la valuation x=1 et y=2, l'atome egal(prod(x,y),succ(y)) a pour valeur de vérité faux, puisque *dans cette interprétation*, prod(1,2) vaut 2 alors que succ(2) vaut 3.

Exemple 2

Valuation :
x = 1
y = 2



egal(prod(*x*, y), succ(y))

vrai

Atomes

Par contre, avec le deuxième exemple d'interprétation, pour la valuation x=1 et y=2, l'atome egal(prod(x,y),succ(y)) a pour valeur de vérité vrai, puisque *dans cette interprétation*, prod(1,2) vaut 2 et succ(2) vaut également 2.

Formules

Briques de construction

Formules

atomes

egal(prod(*x*, y), succ(y))

pair(z) ...

connecteur unaire

$\neg$

quantificateurs

$\exists \quad \forall$

connecteurs binaires

$\vee \quad \wedge \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

parenthèses

( )

Les briques de construction dont sont constituées les formules sont : les atomes, qui peuvent contenir des variables et des termes fonctionnels, le **connecteur unaire** non, les **connecteurs binaires** ou – et – implique – équivalent, les **quantificateurs** existentiel et universel et les parenthèses.

Anatomie d'une formule

Formules

atome $\quad (\neg \langle\text{formule}\rangle)$

$(\langle\text{formule}\rangle \vee \langle\text{formule}\rangle) \quad (\langle\text{formule}\rangle \rightarrow \langle\text{formule}\rangle)$

$(\langle\text{formule}\rangle \wedge \langle\text{formule}\rangle) \quad (\langle\text{formule}\rangle \leftrightarrow \langle\text{formule}\rangle)$

$(\exists\langle variable\rangle\langle\text{formule}\rangle) \quad (\forall\langle variable\rangle\langle\text{formule}\rangle)$

D'un point de vue syntaxique, toute formule est soit un atome, soit la négation d'une formule, soit constituée de deux formules reliées par un connecteur binaire (ou, et, implique ou équivalent), soit constituée d'une variable quantifiée suivie d'une formule.

Parenthèses implicites

plus prioritaires $\Rightarrow$ $\forall\ \exists\ \neg\ \wedge\ \vee\ \rightarrow\ \leftrightarrow$ $\Leftarrow$ **moins prioritaires**

$$\forall x\ \exists y\ \mathrm{q}(x, y)\ \rightarrow \forall x\ \big(\ \mathrm{p}(x) \rightarrow \neg \mathrm{r}(\mathrm{w}(x)) \vee \mathrm{s}(x)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\Big(\forall x\ \big(\exists y\ \mathrm{q}(x, y)\big)\Big)\ \rightarrow \Bigg(\forall x\ \Big(\ \mathrm{p}(x) \rightarrow \Big(\big(\neg \mathrm{r}(\mathrm{w}(x))\big) \vee \mathrm{s}(x)\Big)\Big)\Bigg)$$

Formules

Certaines parenthèses peuvent être omises en vertu de deux conventions : une règle de priorité des connecteurs et quantificateurs, représentés ici du plus prioritaire au moins prioritaire, et une règle d'associativité à gauche (ou priorité à gauche) des connecteurs binaires. Vous voyez ici un exemple de formule ayant des parenthèses implicites et la même où toutes les parenthèses sont explicites.

Sémantique des connecteurs logiques

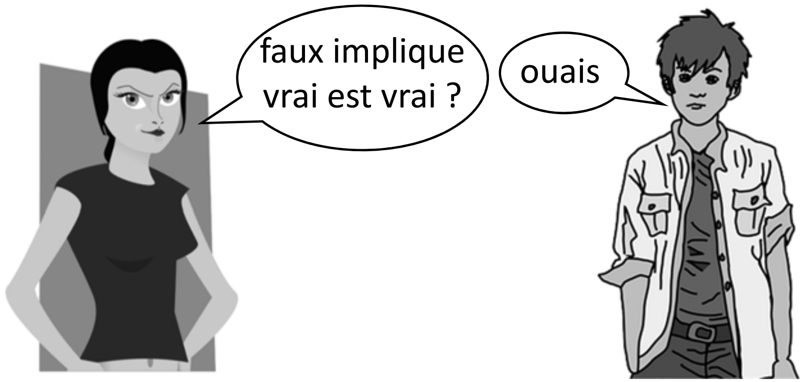
a	b	a ∨ b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b	a ∧ b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	a → b
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

a	b	a ↔ b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	¬a
0	1
1	0



Formules

Pour donner un sens à une formule, il faut donner un sens à ses atomes, ce que nous savons maintenant faire, mais aussi à ses connecteurs logiques et quantificateurs. La sémantique des connecteurs logiques est spécifiée par ces tables de vérité. Regardez les attentivement, en particulier, celle du connecteur implique qui n’est pas spécialement intuitive.

Sémantique des quantificateurs

$\forall x$ <formule F> ⇨ La formule F est vraie si on remplace x par n'importe quelle valeur d'interprétation.

$\exists x$ <formule F> ⇨ Il y a au moins une valeur dans le domaine d'interprétation qui, substituée à x, rend la formule F vraie.

Formules

Les quantificateurs existentiel et universel ont le sens standard utilisé en cours de maths depuis les années Lycée : $\forall x$ signifie « pour toute valeur x du domaine d'interprétation » et $\exists x$ signifie « pour au moins une valeur x du domaine d'interprétation ».

Variables libres, liées et formules closes

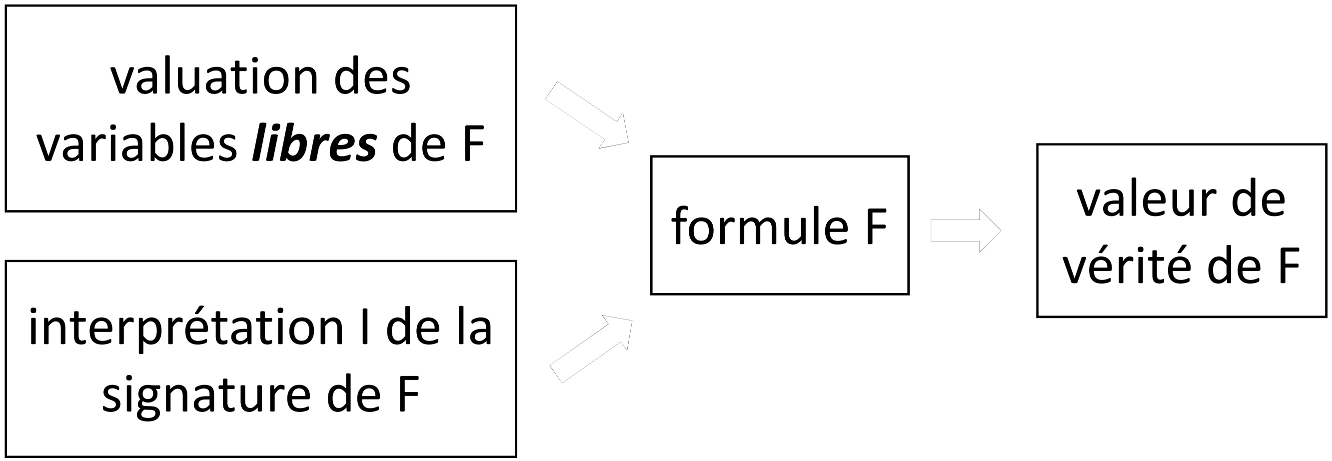
Formules

$$\left(\forall x\, \exists y\ \mathrm{q}(x, y)\right) \to \forall x \left(\mathrm{p}(x) \to \left(\neg \mathrm{r}(\mathrm{w}(x)) \vee \mathrm{s}(x)\right)\right)$$

Dans cette formule il y a deux variable x distinctes, chacune avec plusieurs occurrences.

Toutes les occurrences d’une variable dépendant d’un même quantificateur sont dites **liées**. Les occurrences de variables non quantifiées sont dites **libres**. Par abus de langage, on parle de variables liées et variables libres. Une formule **close** est une formule dans laquelle toutes les variables sont liées.

Valeur de vérité d'une formule



Formules

La valeur de vérité d'une formule est déterminée par l'interprétation de ses symboles fonctionnels et symboles de prédicats, par la sémantique de ses connecteurs et quantificateurs et, si applicable, par la valuation de ses variables *libres*.

Satisfaire, falsifier

interprétation I de la signature de F → formule close F → **vrai**

I **satisfait** F, c'est un **modèle** de F

interprétation I de la signature de F → formule close F → **faux**

I **falsifie** F, c'est un **contre-modèle** de F

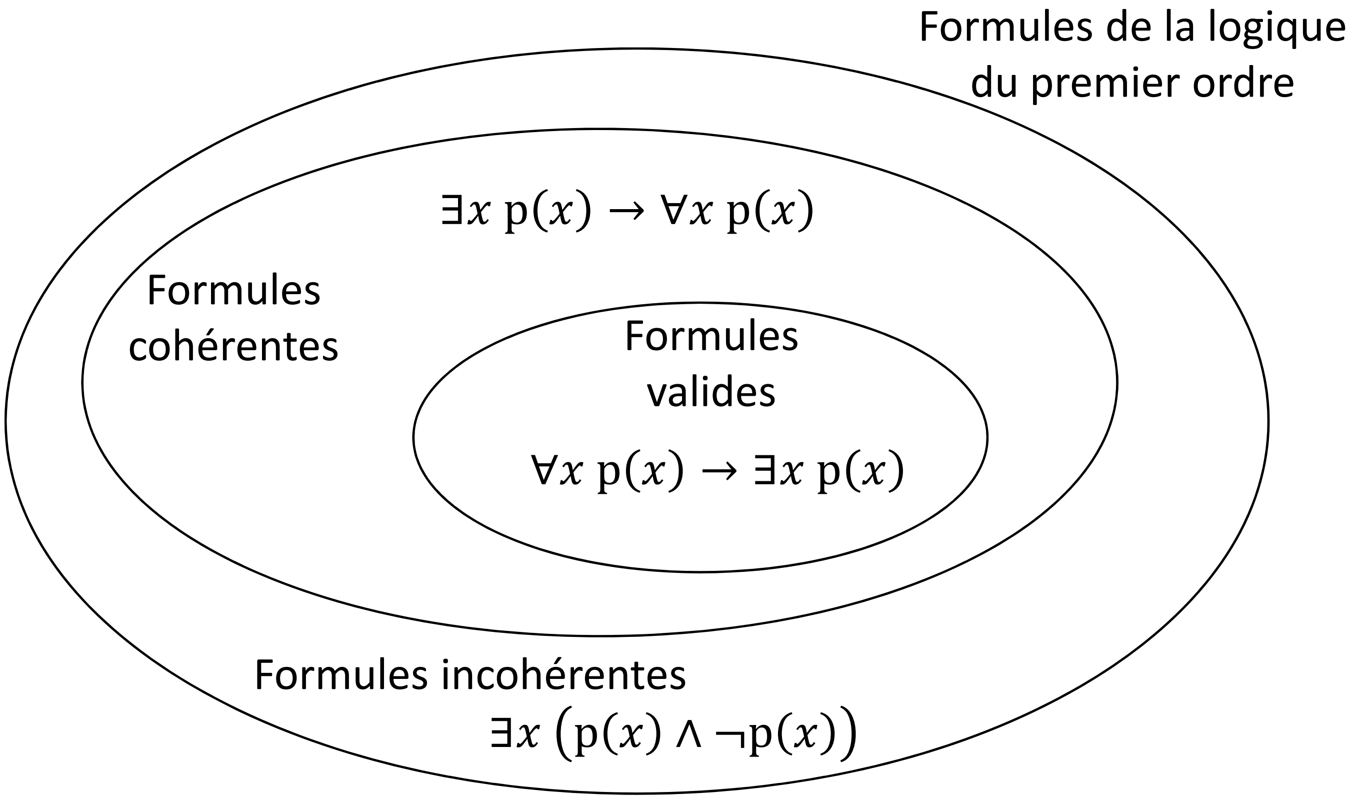
Formules

Dans une interprétation particulière, toute formule *close* F est soit vraie, soit fausse. Si une interprétation rend F vraie, ont dit qu'elle **satisfait** F ou qu'elle est un **modèle** de F sinon on dit qu'elle **falsifie** F ou qu'elle est un **contre-modèle** de F.

Propriétés des formules closes

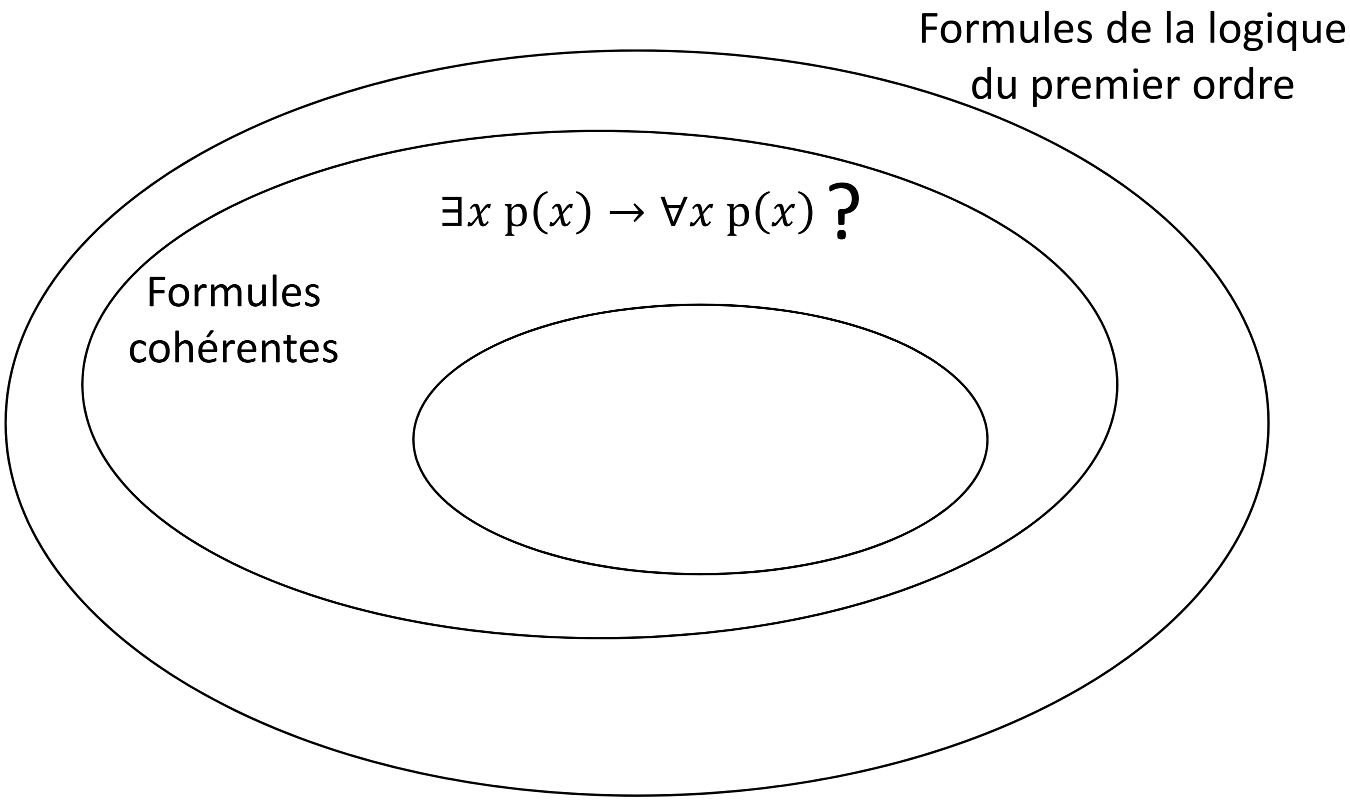
Cohérence, validité

Formules



Une formule est dite **valide** si et seulement si elle est satisfaite par toutes les interprétations de sa signature, c'est à dire de ses symboles fonctionnels et de ses symboles de prédicats. Elle est dite **cohérente** si et seulement si elle est satisfaite par au moins une interprétation de sa signature. Il y a donc trois sortes de formules : celles qui sont valides, celles qui sont incohérentes, et celles qui sont cohérentes sans être valides.

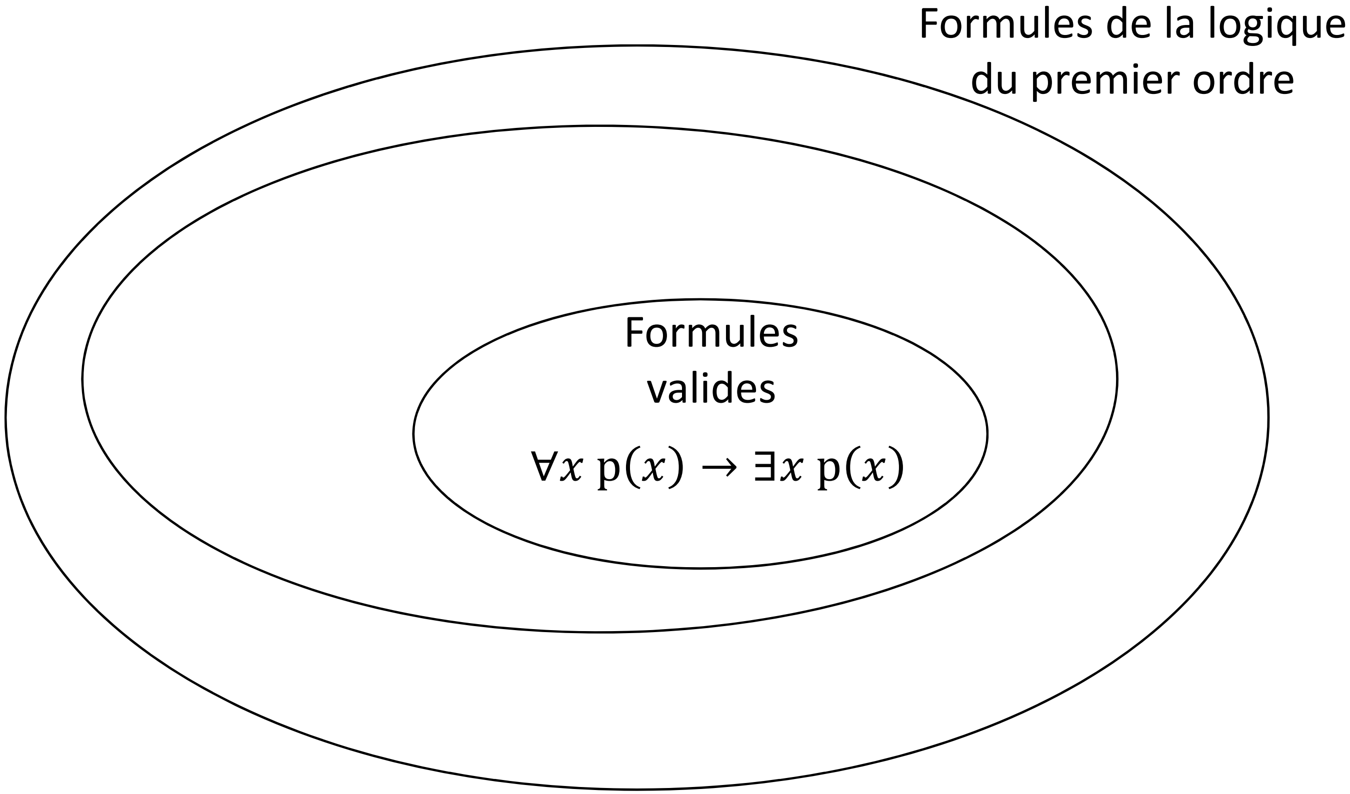
Cohérence, validité



Formules

Mais pourquoi dit-on que la formule $\exists x\ \mathrm{p}(x) \rightarrow \forall x\ \mathrm{p}(x)$ est cohérente alors que ce qu'exprime cette formule est manifestement incorrect, puisque le fait que p(x) soit vrai pour une certaine valeur x n'implique pas qu'il le soit pour toute valeur x ? Cette formule est dite cohérente parce qu'elle est vraie pour *certaines* interprétations de p, en l'occurrence celles dans lesquelles p(x) est vrai pour toute valeur x du domaine d'interprétation.

Cohérence, validité



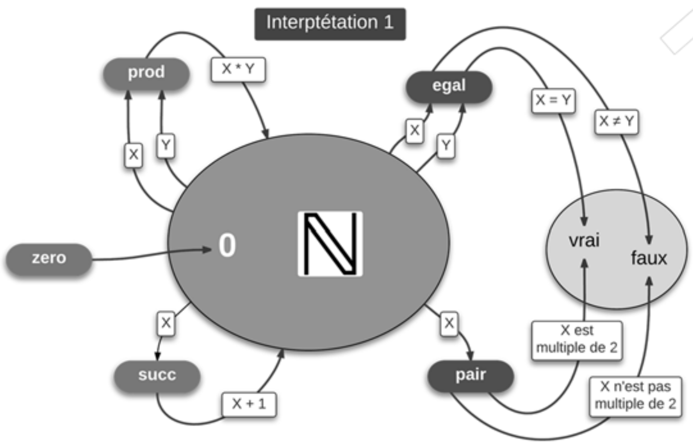
Formules

Mais alors quand on parle, en mathématiques, de formules « correctes », s'agit-il de formules valides ? Généralement pas ! En fait, *tout énoncé d'une propriété mathématique se réfère à une interprétation particulière* (donc à un domaine d'interprétation spécifique et à un sens particulier des symboles utilisé), pour laquelle cet énoncé est vrai.

Exemple de formule cohérente non valide

Formules

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \left(\left(\mathrm{pair}(x) \wedge \mathrm{egal}(\, \mathrm{prod}(x, y), z \,) \right) \rightarrow \ \mathrm{pair}(z) \right)$$

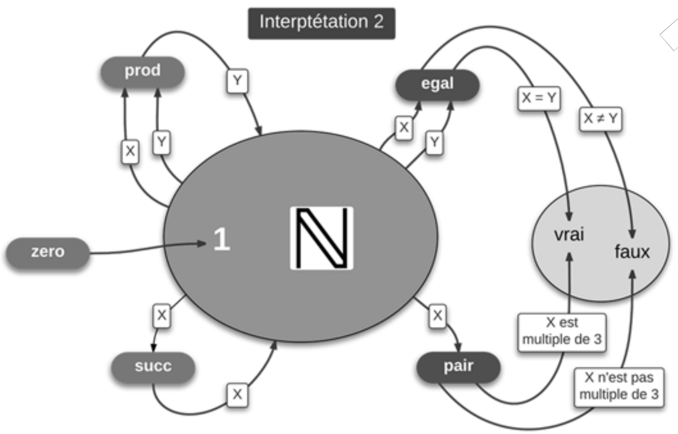


vrai

Prenons un exemple. Dans l'interprétation « standard » des symboles pair, prod et egal, cette formule énonce que le produit d'un nombre pair par une valeur quelconque est un nombre pair, ce qui est parfaitement vrai. Cette formule est donc cohérente.

Exemple de formule cohérente non valide

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \Big(\overbrace{\big(\mathrm{pair}(x) \land \mathrm{egal}(\ \mathrm{prod}(x, y), z\ )\big) \rightarrow\ \mathrm{pair}(z)}^{\text{faux pour x=6, y=5 et z=5}}\Big)$$



faux

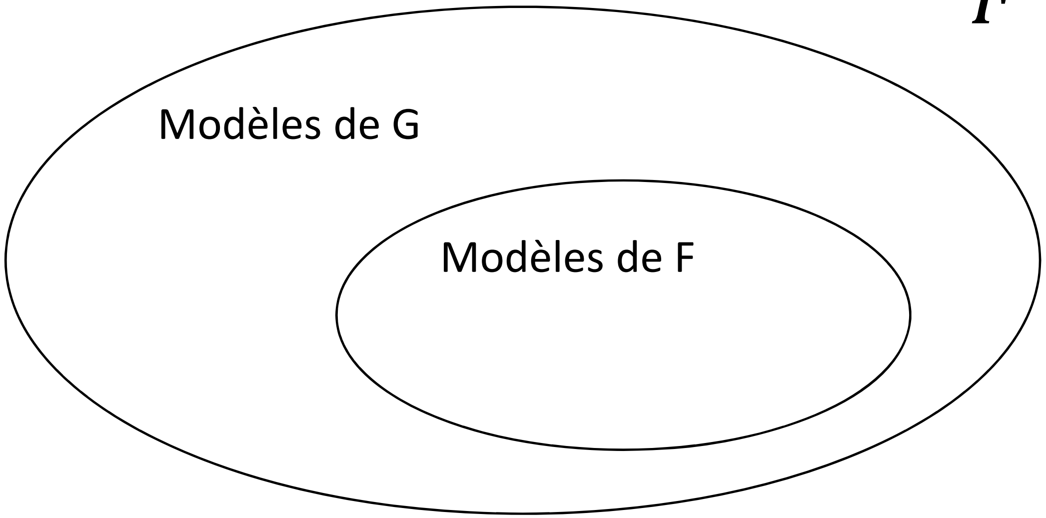
Formules

Mais elle n'est pas valide. *Il y a une infinité d'interprétations pour lesquelles cette formule est fausse*, comme par exemple le deuxième exemple d'interprétation que nous avons introduit tout à l'heure. En effet, avec cette deuxième interprétation, pour la valuation x=6, y=5 et z=5, la sous formule indiquée en orange a pour valeur faux.

Conséquence logique

Formules

$$F \vDash G$$



On dit qu'une formule close G est **conséquence logique** d'une formule close F si et seulement si pour toute signature compatible avec les deux formules, tout modèle de F est un modèle de G. Cela se traduit par le fait que l'ensemble des modèles de F est inclus dans l'ensemble des modèles de G. Et cela se note avec le symbole de la conséquence logique.

Conséquence logique

Formules

$$F \vDash G \quad \Longleftrightarrow \quad F \rightarrow G \text{ est valide}$$

F	G	$F \rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La table de vérité du connecteur implique, que je vous ai présentée tout à l'heure comme étant contre-intuitive, notamment parce-que « faux implique vrai » est vrai, a en fait une justification qui est que pour toutes formules closes *F* et *G*, $F \vDash G$ si et seulement si la formule $F \rightarrow G$ est valide.

A suivre

Prochainement : systèmes de preuve, raisonnement automatique, notion de théorie, indécidabilité et autres sujets passionnants...