

TD de lambda-calcul

A l'attention des étudiants de L3 informatique suivant l'UE programmation logique et fonctionnelle.

Dernière mise à jour le 19/01/2016.

Exercices d'assimilation

1. Syntaxe

Pour chacun des termes suivants, identifiez toutes les abstractions, les applications, ainsi que les occurrences libres et liées de variables.

1. $\lambda x. \lambda y. x$
2. xy
3. $\lambda x. xy$
4. $(\lambda x. x)x$
5. $\lambda x. \lambda x. x$
6. $\lambda x. \lambda y. xy$
7. $\lambda t. x\lambda f. t$
8. $\lambda t. xy\lambda t. xy\lambda x. z$

2. Equivalence de termes

Deux termes A et B sont α –équivalents si et seulement si on peut obtenir B en renommant des occurrences de variables liées ensembles dans A.

Pour chacune des paires de termes suivantes, déterminez s'il y a α –équivalence.

xx	yy
$\lambda x. yx$	$\lambda x. yy$
$\lambda x. yx$	$\lambda z. yz$
$\lambda x. yx$	$\lambda x. zx$
$\lambda x. \lambda y. yx$	$\lambda y. \lambda x. xy$
$\lambda x. y\lambda z. zx$	$\lambda x. y\lambda y. yx$

Trouver un terme équivalent au terme ci-dessous dans lequel chaque lieu est associé à une variable différente.

$$\lambda x. x(\lambda y. xy)(\lambda x. x)(\lambda y. yx)$$

3. Evaluation

Réduisez les termes suivants en identifiant à chaque étape (si applicable) la tête, le corps et l'argument du redex exploité.

1. $(\lambda x. \lambda y. xyx)(\lambda x. x)$
2. $(\lambda t. tt)(\lambda x. x)$
3. $\lambda t. tt\lambda x. x$
4. $(\lambda t. tt)\lambda x. \lambda y. xy$
5. $(\lambda x. \lambda y. xy)(\lambda x. xx)$
6. $(\lambda x. (\lambda y. y)x)\lambda x. xx$
7. $((\lambda x. x\lambda t. t)\lambda w. w)t$

4. Renommage

Existe-t-il un terme B tel que l'évaluation de $(B)z$ nécessite un renommage ? Si oui, donnez un exemple, sinon expliquez pourquoi.

Existe-t-il un terme A tel que l'évaluation de $(\lambda x. xx)A$ nécessite un renommage ? Si oui, donnez un exemple, sinon expliquez pourquoi.

Exercice de consolidation

On représente les entiers par les termes suivants :

valeur	représentation en lambda-calcul
1	$\lambda f. \lambda x. fx$
2	$\lambda f. \lambda x. f(fx)$
3	$\lambda f. \lambda x. f(f(fx))$
etc.	etc.

On spécifie par ailleurs les abstractions suivantes :

nom	spécification en lambda-calcul
sum	$\lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. mf(nfx)$
mul	$\lambda m. \lambda n. \lambda f. n(mf)$
pow	$\lambda m. \lambda n. nm$

Votre mission consiste à évaluer les termes ci-dessous. Pour limiter la complexité des termes intermédiaires, il est préférable de ne remplacer un entier par sa représentation que lorsque toutes les réductions réalisables ont été faites.

- ✓ **sum** 1 1
- ✓ **mul** 1 1
- ✓ **mul** 1 2
- ✓ **pow** 1 2

En vous basant sur les termes **sum** et **mul**, donnez les termes **incr** et **double** qui représentent les programmes λ -calcul permettant respectivement d'incrémenter un entier et de le multiplier par deux, puis vérifiez leur fonctionnement en évaluant les termes **incr** 1 et **double** 1.

Donnez le terme de λ -calcul **carre** qui représente le programme permettant d'élever une valeur au carré.