L3 - Programmation Logique et fonctionnelle - TD2
Logique propositionnelle

1 Interprétation

Donner les valeurs de vérité des formules suivantes pour les interprétations proposées.

1. $c \wedge (a \vee b) \rightarrow (a \wedge b)$ avec $\{c = F, a = V, b = F\}$.
2. $c \wedge (a \vee b) \rightarrow (a \wedge b)$ avec $\{c = V, a = F, b = F\}$.
3. $(a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee b \vee \neg c)$ avec $\{a = F, b = F, c = V\}$.
4. $(a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee b \vee \neg c)$ avec $\{a = V, b = V, c = F\}$.
5. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow c) \vee d)$ avec $\{a = V, b = F, c = F, d = V\}$.
6. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow c) \vee d)$ avec $\{a = F, b = V, c = F, d = F\}$.

2 Validité et satisfaisabilité

Déterminez si chacune des formules suivantes est valide et si elle est satisfaisable.

1. $(a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (\neg d \vee \neg a)$;
2. $(a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (c \vee \neg d) \wedge (d \vee \neg a) \wedge (\neg a \vee \neg c)$;
3. $x \rightarrow x$;
4. $(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a)$;
5. $(a \rightarrow b) \rightarrow (b \rightarrow a)$;
6. $(a \wedge \neg b) \wedge (a \rightarrow b)$;
7. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$;
8. $(\bar{a} \vee \bar{b} \vee x) \wedge (a \vee \bar{x}) \wedge (b \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{a} \vee y) \wedge (\bar{b} \vee y) \wedge (a \vee b \vee \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{y}) \wedge (\bar{z} \vee y)$.

3 Raisonnement

Avec une approche sémantique (i.e., basée sur les valeurs possibles des variables et les tables de vérité des connecteurs),

1. déterminez si la formule $p \wedge (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ a pour conséquence logique $q \rightarrow r$;
2. déterminez si la formule $p \rightarrow (q \vee r)$ a pour conséquence logique $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$;
3. déterminez si la formule $(a_1 \vee \cdots \vee a_n \vee \neg x) \wedge (b_1 \vee \cdots \vee b_m \vee x)$ a pour conséquence logique $(a_1 \vee \cdots \vee a_n \vee b_1 \vee \cdots \vee b_m)$ pour tout $m > 0, n > 0$.

4 Modélisation

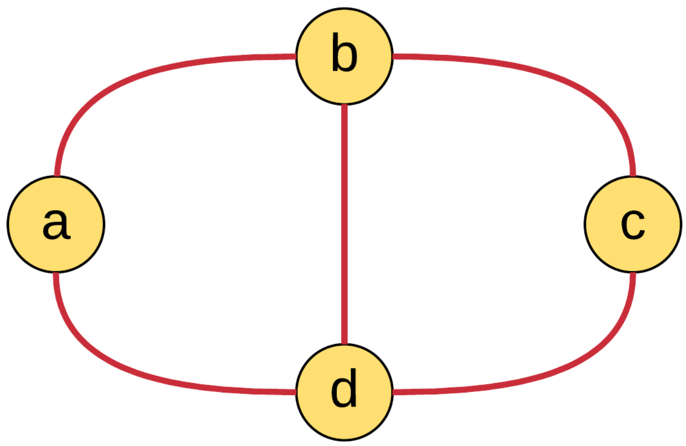
Modélisez chacune des phrases suivantes en logique propositionnelle.

1. «Il n'y a pas de fumée sans feu.» Variables : `fumée`, `feu`.
2. «Si tu valides ton année tu iras en master sinon tu redoubleras.» Variables : `annéeok`, `master`, `redoublement`.

3. «Soit tu vas à la piscine, soit tu vas au cinéma, mais tu ne fais pas les deux.» Variables : `piscine`, `cinéma`.
4. «Les escargots sortent si et seulement si il pleut et il fait doux.» Variables : `pluie`, `doux`, `escargotsortis`.

5 Modélisation de problèmes

Le but de cet exercice est de montrer comment le problème de coloriage d'un graphe peut être modélisé et résolu comme un problème de satisfaisabilité d'une formule de logique propositionnelle. Bien que l'approche soit générale (et très efficace avec les solveur SAT modernes), nous allons simplement illustrer la démarche sur un exemple.
Voici un graphe :



A l'oeil nu, on voit bien qu'il n'est pas possible d'en colorier les sommets avec deux couleurs de manière à ce que deux sommets voisins aient toujours des couleurs différentes. Nous allons essayer de représenter ce problème sous la forme d'une formule logique satisfaisable si et seulement si le coloriage est possible. La démarche adoptée doit être généralisable à n'importe quel graphe avec un nombre arbitraire de couleurs.
Pour ce faire, on utilise 8 variables propositionnelles : $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$. On adopte la convention suivante : $a_i =$ `True` si et seulement si a est colorié avec la couleur $i \in \{1, 2\}$, et de même pour les autres sommets.

1. Donnez une formule qui s'interprète à `Vrai` si et seulement si le sommet a est colorié correctement (i.e., il a une couleur et une seule) ;
2. donnez une formule qui s'interprète à `Vrai` si et seulement si les sommets a et b n'ont pas la même couleur ;
3. donnez une formule ϕ qui s'interprète à `Vrai` si et seulement si le graphe est colorié de manière à ce que toute arête relie des sommets de couleurs différentes ;
4. avec un raisonnement sémantique (i.e. en essayant de donner des valeurs aux variables et en recherchant les conséquences logiques), montrez que la formule ϕ est non satisfaisable. Il est judicieux de décomposer le raisonnement en plusieurs étapes, par exemple commener par monter que ϕ ne peut être satisfaite si $b_1 =$ `True`, puis monter ensuite qu'elle ne peut pas être non plus satisfaite si $b_1 =$ `False` (je choisis b_1 parce qu'elle est associée à un sommet à trois voisins, ce qui accélère le raisonnement) ;
5. pour appliquer cette technique à un graphe comportant n sommets et p arrêtes à colorier avec k couleurs, combien faut il de variables, et combien y aura t-il d'occurrences de ces variables dans la formule ϕ? donnez la valeur numérique pour $n = 100, p = 500, k = 7$.