L3 - Programmation Logique et fonctionnelle - TD3
Logique des prédicats

1 Syntaxe

Identifiez les termes, les atomes, les symboles fonctionnels, les symboles de prédicats, les variables dans la formule suivante :

$$\forall X(p(X) \vee q(X, f(X, f(Y, g(X))))) \rightarrow \exists Y p(g(Y))$$

2 Modélisation

Modélisez chacune des phrases suivantes en logique des prédicats

1. «Tous les plombiers sont des hommes.» (Prédicats : `plombier`/1, `homme`/1)
2. «Tous les hommes sont plombiers ou riches.» (Prédicats : `homme`/1, `plombier`/1, `riche`/1)
3. «Certains plombiers sont riches.» (Prédicats : `plombier`/1, `riche`/1)
4. «Aucun plombier n'est riche.» (Prédicats : `plombier`/1, `riche`/1)
5. «Tous les hommes ne sont pas plombiers.» (Prédicats : `plombier`/1, `homme`/1)
6. «Nul n'assassine un souverain auquel il est fidèle.» (Prédicats : `assassiner`/2, `fidèle`/2, `souverain`/1)
7. «Les gens qui possèdent une voiture qui n'est pas rouge ont tous un chien.» (Prédicats : `homme`/1, `voiture`/1, `rouge`/1, `possède`/2, `chien`/1)
8. «Quiconque a un chien ne possède pas de voiture rouge.» (Prédicats : `homme`/1, `voiture`/1, `rouge`/1, `possède`/2, `chien`/1)

3 Interprétation

3.1

Soit la formule suivante : $(\exists X p(X)) \wedge (\exists X \neg p(X))$. Donnez une interprétation qui satisfait cette formule et une interprétation qui la falsifie.

3.2

On considère la formule $G = \forall X \exists Y ((p(X) \wedge p(Y)) \rightarrow (q(X) \vee q(Y)))$ et l'interprétation I sur le domaine $\{1, 2, 3, 4\}$ telle que $p(1) = \texttt{vrai}$, $p(2) = \texttt{vrai}$, $p(3) = \texttt{faux}$, $p(4) = \texttt{faux}$, $q(1) = \texttt{vrai}$, $q(2) = \texttt{faux}$, $q(3) = \texttt{vrai}$, $q(4) = \texttt{faux}$.
Quelle est la valeur de vérité de G pour cette interprétation I ?

3.3

On considère la formule $G = \exists Y \forall X ((p(X) \wedge q(Y)) \rightarrow (p(X) \vee q(Y)))$ et l'interprétation I sur le domaine $\{1, 2, 3, 4\}$ telle que $p(1) = \texttt{vrai}$, $p(2) = \texttt{vrai}$, $p(3) = \texttt{faux}$, $p(4) = \texttt{faux}$, $q(1) = \texttt{vrai}$, $q(2) = \texttt{faux}$, $q(3) = \texttt{vrai}$, $q(4) = \texttt{faux}$.
Quelle est la valeur de vérité de G pour cette interprétation I ?

3.4

On considère la signature suivante :

- Symboles de prédicats : `egal`$/2$.
- Symboles de fonctions : aucun.

On considère l'interprétation suivante pour cette signature :

- domaine d'interprétation : $\{a, b, c, d, e\}$.
- $\texttt{egal}(A, B) = V$ si et seulement si $(A, B) \in \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c), (d, e), (e, d), (e, c)\}$.

On considère maintenant la formule suivante :

$$
\begin{array}{l}
(\forall X(\texttt{egal}(X, X)))\wedge \\
(\forall X \forall Y(\texttt{egal}(X, Y) \rightarrow \texttt{egal}(Y, X)))\wedge \\
(\forall X \forall Y \forall Z((\texttt{egal}(X, Y) \wedge \texttt{egal}(Y, Z)) \rightarrow \texttt{egal}(X, Z)))
\end{array}
$$

- Quelle est la valeur de vérité de cette formule pour cette interprétation ?
- Qu'en est il si on ajoute le couple (c, e) à l'ensemble des valeur rendant vrai le prédicat `egal` ?

4 Validité et satisfaisabilité

Déterminez si chacune des formules suivantes est satisfaisable et si elle est valide. Justifiez vos réponses.

1. $(\forall X g(X)) \rightarrow (\forall Y g(Y))$
2. $(\forall X(g(X) \wedge h(X))) \rightarrow ((\forall X g(X)) \wedge (\forall X h(X)))$
3. $(\forall X(g(X) \vee h(X))) \rightarrow ((\forall X g(X)) \vee (\forall X h(X)))$
4. $(\forall X \exists Y p(X, Y)) \rightarrow (\exists Y \forall X p(X, Y))$
5. $(\exists X \forall Y p(X, Y)) \rightarrow (\forall Y \exists X p(X, Y))$
6. $(\forall X(p(X) \wedge \neg q(X))) \rightarrow (\exists X q(X))$