Master Informatique
Modélisation Géométrique et Synthèse d'Images
Juin 2009

Durée : 2h
Tous documents personnels autorisés.

1. Surfaces de Bézier (10 points) :

Soit deux surfaces de Bezier. La surface P(u,v) est construite sur les points P_{ij} (i=0,1,2 et j=0,1,2). La surface Q(u,v) est construite sur les points Q_{ij} (i=0,1,2 et j=0,1,2).

1. Donner le degré des surfaces pour le paramètre u et pour le paramètre v.
2. Donner les expressions des fonctions de base pour ces différents degrés.
3. Donner l'expression des surfaces sous forme matricielle (préciser les valeurs des éléments des matrices).

On désire raccorder les deux surfaces par leurs bords. Pour fixer les idées on considérera le bord P(u,1) et le bord Q(u,0).

4. A l'aide des expressions matricielles des surfaces P(u,v) et Q(u,v) montrer quelle condition on doit fixer sur les points P_{ij} et Q_{ij} pour obtenir la C^0 continuité à la jonction.

5. Même question avec la C1 continuité.

2. Cylindres en OpenGL

On donne le code OpenGL ci-dessous permettant de modéliser par les bords un cylindre (un vrai, troué, c'est-à-dire sans « couvercles »). Ce cylindre est de rayon R=1, et de hauteur 1 comprise entre y=-1/2 et y=1/2.

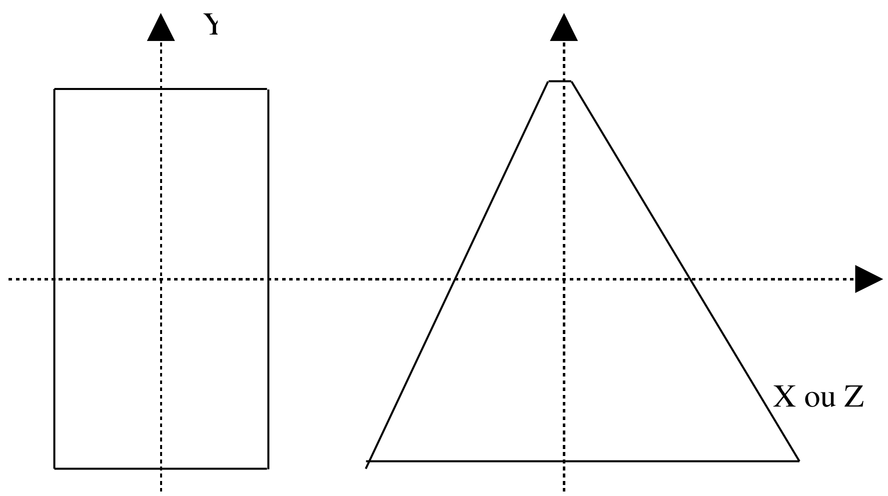
```
void Cylindre(int bandes) {
	float theta=0.0, dtheta=(2.0*M_PI)/(float)bandes;
	Point P0,P1;

	glBegin(GL_QUAD_STRIP);
	for(int i=0; i<=bandes; i++) {
		// points du haut
		P0.v[0]=cos(theta);	P0.v[1]=-1.0/2.0;	P0.v[2]=sin(theta);
		//matrice de transformation de Fredo F à écrire
		// P0=F.P0 ;
		glNormal3fv(P0.v);		glVertex3fv(P0.v);

		// points du bas
		P1.v[0]=cos(theta);	P1.v[1]=1.0/2.0;	P1.v[2]=sin(theta);
		//matrice de transformation de Fredo F à écrire
		// P1=F.P1 ;
		glNormal3fv(P1.v);		glVertex3fv(P1.v);

		theta += dtheta;
	}
	glEnd();
}
```

1 . Le but de la manœuvre est de transformer le cylindre en « pseudo-cône » de bases respectives R-T et R+T (0<T<R).



1. L’étudiant Jojo propose un biais pour effectuer la déformation qui permet de transformer ce cylindre en « pseudo-cône » . Il l'applique par une matrice de transformation appelée matrice « de Jojo » J dans la partie affichage selon le code suivant :

```
glPushMatrix();
// remplissage de la matrice de biais J (matrice dite « de Jojo »)
glMultMatrixf(J);
Cylindre(30);
glPopMatrix();
```

Est-ce possible ? Si oui, donner la matrice de Jojo correspondante pour cette transformation. Si non, dire pourquoi.

2. L’étudiant Fredo préfère une transformation (appelée transformation de Fredo) intégrée dans le code de Cylindre (voir code où F.P signifie multiplication par la matrice F du point P)

Est-ce possible ? Si oui, donner la matrice F correspondante pour cette transformation. Si non, dire pourquoi.

Correction

1) La surface de Bezier P(u,v) est construite avec les points P_{ij} i=0,1,2 et j=0,1,2.

Elle peut donc s 'écrire $P(u,v)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} B_i^2(u)B_j^2(v)P_{ij}$

avec $B_0^2(u)=(1-u)^2 \quad B_1^2(u)=2\mathrm{u}(1-u) \quad B_2^2(u)=u^2$

Matriciellement on l'écrit $P(u,v)=U^T M P M^T V$ avec $U=\begin{bmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \quad V=\begin{bmatrix} v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad M=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$

On a bien
$$\begin{aligned} U^T M &= \begin{bmatrix} u^2-2\mathrm{u}+1 & -2\mathrm{u}^2-2\mathrm{u} & u^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-u)^2 & -2\mathrm{u}(1-u) & u^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_0^2(u) & B_1^2(u) & B_2^2(u) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'écriture est identique pour Q(u,v).

2) C^0 continuité :
pour P(u,1), on remplace v par 1 ce qui donne V = $[1\ 1\ 1]^T$ et pour Q(u,0) on remplace v par 0 ce qui donne V = $[0\ 0\ 1]^T$
M^TV devient alors respectivement pour P et Q : $[0\ 0\ 1]^T$ et $[1\ 0\ 0]^T$.
D'où $PM^TV = [P_{02}\ P_{12}\ P_{22}]^T$ et $QM^TV = [Q_{00}\ Q_{10}\ Q_{20}]^T$.
Il y a C^0 continuité si P(u,1) = Q(u,0) $\forall$ u $\in$ [0,1], donc si $[P_{02}\ P_{12}\ P_{22}] = [Q_{00}\ Q_{10}\ Q_{20}]$.

C^1 continuité :
La dérivée en v de P, notée P', s'obtient en remplaçant V par V' = $[2v\ 1\ 0]^T$
pour P'(u,1), on remplace v par 1 ce qui donne V' = $[2\ 1\ 1]^T$ et pour Q'(u,0) on remplace v par 0 ce qui donne V' = $[0\ 1\ 0]^T$
M^TV' devient alors respectivement pour P et Q : $[0\ –2\ -2]^T$ et $[-2\ 2\ 0]^T$.
D'où $PM^TV' = [P_{02}-P_{01}\ P_{12}-P_{11}\ P_{22}-P_{21}]$ et $QM^TV' = [Q_{01}-Q_{00}\ \ Q_{11}-Q_{10}\ \ Q_{21}-Q_{20}]$.
Il y a C^1 continuité si P'(u,1) = Q'(u,0) $\forall$ u $\in$ [0,1], donc si
$[P_{02}-P_{01}\ P_{12}-P_{11}\ P_{22}-P_{21}] = [Q_{01}-Q_{00}\ \ Q_{11}-Q_{10}\ \ Q_{21}-Q_{20}]$ c'est à dire si les tangentes aux extrémités sont alignées.