

Examen Algorithmique et complexité

master informatique

septembre 2007

Question 1. Une suite f à valeurs entières est définie par : $f(0) = v_0, f(1) = v_1, f(2) = v_2, f(n) = af(n-1) + bf(n-2) + cf(n-3)$ pour $n > 2$, avec v_0, v_1, v_2, a, b, c des valeurs entières données. Décrivez une méthode rapide pour calculer $f(n)$ en $O(\log n)$ opérations entières. Quelle difficulté pouvez vous rencontrer lors de la programmation ?

Question 2. Pour évaluer le nombre de poissons dans un étang, un garde pêche M poissons, les marque, et les relâche dans l'étang. Le lendemain, il repêche R poissons, et m sont marqués. Combien y a t-il de poissons dans l'étang, à peu près ? On suppose que les poissons ont tous la même probabilité d'être pêchés, même les poissons pêchés et marqués le premier jour. Expliquez le raisonnement en une phrase. Déduisez en une méthode pour compter approximativement le nombre d'éléments d'un ensemble (fini...) sans générer tous les éléments. Quelle procédure est nécessaire ?

Question 3. Soit un ensemble fini, de n éléments. Des éléments de l'ensemble sont choisis au hasard, tous avec la même probabilité $1/n$. Aucun élément choisi n'est retiré de l'ensemble : après avoir été choisi, il a la même probabilité d'être choisi de nouveau. Appelons collision le fait de choisir 2 fois le même élément. On peut calculer le nombre k de tirages nécessaires en moyenne pour qu'une première collision ait lieu ; grosso modo, k est de l'ordre de $\sqrt{2n}$, page 103-104 de l'Introduction à l'algorithmique (22 ou 23 pour $n = 365$ alors que $\sqrt{2} \times 365 = 27.02$). On supposera pour simplifier que $k = \sqrt{2n}$. Déduisez en une autre méthode pour évaluer le nombre d'éléments dans un ensemble, quand vous disposez d'une fonction générant un élément au hasard dans cet ensemble, tous les éléments étant équiprobables. Que doit faire le garde pêche pour suivre cette méthode ?

Question 4. Proposer une méthode en $O(n)$ tests pour trouver le dernier élément d'une liste de n éléments pour lequel une fonction prédicat p (qui vous est fournie) rend vrai ? Vous pouvez supposer que la fonction prenne un second argument, qu'elle rend si aucun élément de la liste ne vérifie le prédicat. Une programmation en caml n'est pas demandée.