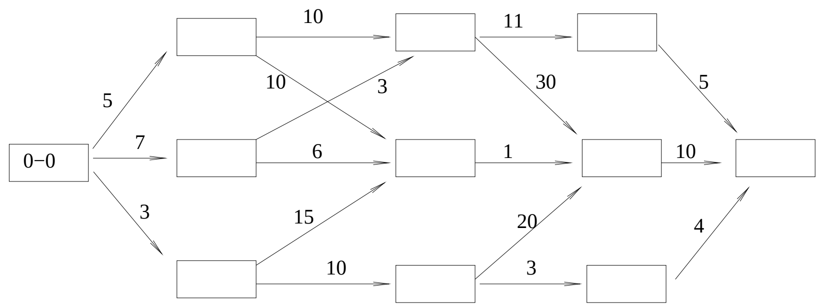
ALGORITHMIQUE ET COMPLEXITE

Master Informatique, première année, 17 janvier 2011

Documents autorisés : une page A4 recto verso.
TOUTES LES QUESTIONS ONT ETE VUES EN COURS, TD OU TP.
Répondez aux questions, dans l'ordre, en donnant le numéro des questions.
Ecrivez lisiblement.
Toutes les questions sont notées sur 1 point, sauf la dernière sur 5 points.

1. Citer un algorithme en $O(n)$.
2. Citer un algorithme en $O(n^2)$.
3. Citer un algorithme en $O(n^3)$.
4. Citer un algorithme en $O(\log n)$.
5. Citer un algorithme en $O(n \log n)$.
6. Quel est le nombre minimal de comparaisons de 2 éléments pour trier n éléments ?
7. Quelle est la méthode vue avec Mr D. Michelucci (en TP d'ocaml) pour résoudre le problème des reines ? Vous pouvez donner le nom anglais.
8. Quelles sont les méthodes vues avec Mr J-J. Chabrier pour résoudre le problème des reines ?
9. Vous jouez au Nim avec un ami. Il reste 4 tas, de 7, 11, 13 et 17 pièces. Quel coup devez vous jouer pour gagner ? On rappelle que vous devez retirer un nombre non nul de pièces dans le tas de votre choix. Le joueur qui retire la dernière pièce a gagné.
10. Représentez les 3 étapes successives du tri par base (*radix sort*) (en ordre croissant) des nombres entiers, écrits en base 4: 123, 201, 21, 321, 231, 331, 12, 232, 111, 121. On rappelle que ce tri ne compare pas les nombres mais utilise les chiffres de la représentation des entiers.
11. Sur le graphe ci-dessous, les sommets (des rectangles) représentent des états, et les arcs des transitions ou tâches entre états. Chaque arc est étiqueté par la durée de la tâche. Inscrivez la date au plus tôt dans le rectangle de chaque sommet. Par convention, la date au plus tôt du sommet source est 0.



12. Inscrivez les dates au plus tard. Par exemple, 7-10 pour un sommet signifie que 7 est la date au plus tôt et 10 la date au plus tard.

13. Soulignez le chemin critique.

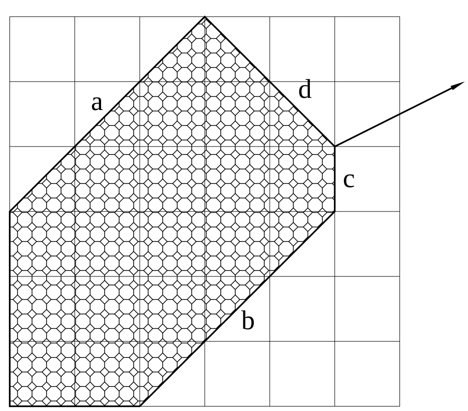
14. Définissez la valeur de la date au plus tôt en ume phrase.

15. Définissez la valeur de la date au plus tard en une phrase.

16. (sur 5 points) Résolvez avec la méthode du simplexe le problème de programmation linéaire suivant:

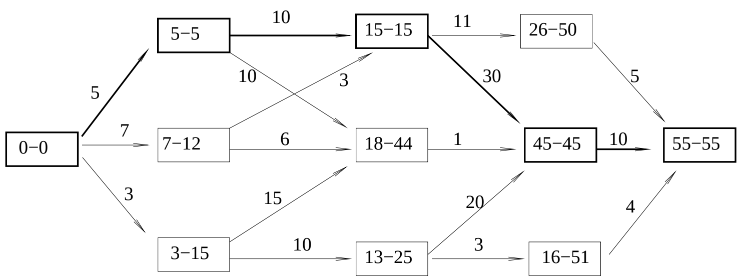
$$\begin{array}{l} \max\ 2x+y \\ -x+y \leq 3 \\ x-y \leq 2 \\ x \leq 5 \\ x+y \leq 9 \end{array}$$

Vous utiliserez les variables d'écart : a, b, c, d, dans cet ordre. On rappelle que toutes les variables (x, y, a, b, c, d) sont non négatives. Pour vous aider, l'optimum vaut 14, et se produit en $x = 5, y = 4$. La figure ci-dessous représente le polytope admissible, et peut vous aider à vérifier vos calculs au fur et à mesure. Ecrivez les 4 tableaux successifs, de la situation initiale à la situation optimale.



Solution

Dates au plus tôt et au plus tard



Tri par base

Tri par base de 123, 201, 21, 321, 231, 331, 12, 232, 111, 121.

$$
\begin{array}{l}
0: \\
1: 201, 21, 321, 231, 331, 111, 121 \\
2: 12, 232 \\
3: 123 \\
\rightarrow 201, 21, 321, 231, 331, 111, 121, 12, 232, 123 \\
0: 201 \\
1: 111, 012 \\
2: 021, 321, 121, 123 \\
3: 231, 331, 232 \\
\rightarrow 201, 111, 012, 021, 321, 121, 123, 231, 331, 232 \\
0: 012, 021 \\
1: 111, 121, 123 \\
2: 201, 231, 232 \\
3: 321, 331 \\
\rightarrow 012, 021, 111, 121, 123, 201, 231, 232, 321, 331
\end{array}
$$

Nim

Pour gagner, vous devez réduire le tas de 17 pièces à un tas de 1 pièce.

Programmation linéaire

En utilisant les variables d'écart, le problème de programmation linéaire est :

$$
\begin{array}{l}
max\ \phi = 2x + y \\
-x + y + a = 3 \\
x - y + b = 2 \\
x + c = 5 \\
x + y + d = 9
\end{array}
$$

Le premier tableau est :

$$\begin{aligned}
&max\ \phi = 2x + y\\
&a = 3 + x - y\\
&b = 2 - x + y\\
&c = 5 - x\\
&d = 9 - x - y
\end{aligned}$$

Augmentons x; il ne peut dépasser 2, car b deviendrait négatif :

$$\begin{aligned}
&max\ 4 - 2b + 3y\\
&a = 5 - b\\
&x = 2 - b + y\\
&c = 3 + b - y\\
&d = 7 + b - 2y
\end{aligned}$$

Augmentons y; il ne peut dépasser 3 car c deviendrait négatif.

$$\begin{aligned}
&max\ \phi = 13 + b - 3c\\
&a = 5 - b\\
&x = 5 - c\\
&y = 3 + b - c\\
&d = 1 - b + 2c
\end{aligned}$$

Augmentons b; il ne peut dépasser 1 car d deviendrait négatif.

$$\begin{aligned}
&max\ \phi = 14 - c - d\\
&a = 4 - 2c + d\\
&x = 5 - c\\
&y = 4 + c - d\\
&b = 1 + 2c - d
\end{aligned}$$

Donc l'optimum vaut 14 et se produit en $c = d = 0$, $x = 5$, $y = 4$, $a = 4$, $b = 1$.